MA1102-6 Álgebra Lineal
Profesor: Mauricio Telias H.
Auxiliar: Arturo Merino F.

Resumen C2

Def: Llamamos $(V, +, \cdot)$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$ si para todo $u, v, w \in V$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$, se verifican las siguientes propiedades:

- $(V, +)$ es grupo abeliano y $\mathbb{F}$ un cuerpo.
- $\lambda u \in V$.
- $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$.
- $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$.
- $\lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u$.
- $1_{\mathbb{F}} u = u$.

Def: Sea un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Diremos que $U \neq \emptyset$, es un subespacio vectorial de V si y sólo si:

1. $\forall u, v \in U,\ u + v \in U$.
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall u \in U,\ \lambda u \in U$.

Pro: Sean U, V subespacios vectoriales de E, luego $U \cap V$ es un subespacio vectorial de E.

Pro: $E \subseteq V_{\mathbb{F}}$ no vacío es s.e.v. del espacio vectorial $V_{\mathbb{F}}$ si y sólo si:

$$\forall x, y \in E \ \ \forall \lambda \in \mathbb{F} \qquad x + \lambda y \in E$$

Def: Sea $\{v_i\}_{i=1}^n \subseteq V$ un conjunto de vectores y $\{\lambda_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathbb{K}$ un conjunto de escalares. Llamaremos combinación lineal a la siguiente suma ponderada:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$$

Def: Sean $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ con V espacio vectorial. Definimos el generado por A como:

$$\langle \{v_1, \ldots, v_n\} \rangle = \left\{ v \in V : v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i,\ \lambda_i \in \mathbb{K} \right\}$$

Pro: $\langle \{v_1, \ldots, v_n\} \rangle$ es un subespacio vectorial de V, además es el subespacio vectorial más pequeño que contiene a $\{v_1, \ldots, v_n\}$.

Def: Diremos que un conjunto de vectores $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ es linealmente independiente si:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0 \implies \lambda_i = 0 \ \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

Donde λ_i son escalares.

Def: Diremos que un conjunto de vectores $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ es linealmente dependientes si existen $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ escalares, no todos nulos tal que:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0$$

Teo: En $\mathbb{R}^n$, $m > n$ vectores son siempre linealmente dependientes.

Def: Dado un espacio vectorial V, diremos que un conjunto A es una base de V si:

1. A es linealmente independiente.
2. $V = \langle A \rangle$

Pro: Sea E un espacio vectorial, B será una base de E si y sólo si todo $v \in E$ se puede escribir de manera única como combinación lineal de elementos de B.

Pro: Sea E un espacio vectorial e G un conjunto tal que $\langle G \rangle = E$, entonces existe un conjunto A tal que $G \setminus A$ es una base de E.

Pro: Sea E un espacio vectorial e I un conjunto l.i., entonces existe un conjunto B tal que $I \cup B$ es una base de E.

Pro: Sea B una base tal que $|B| = n$ y un conjunto X tal que $|X| > n$. Entonces X es linealmente dependiente.

Pro: Sea B una base tal que $|B| = n$. Luego el cardinal de todas las bases es n.

Def: Sea B una base de V, definimos la dimensión como $\dim V = |B|$.

Teo: Sea V un e.v. tal que $\dim V = n$.

1. Todo conjunto X l.i. tal que $|X| = n$ es base.
2. Sea U un s.e.v. de V, entonces $\dim U \leq \dim V$. Además si $\dim U = \dim V$, entonces $U = V$.

Def: Sean U y W subespacios vectoriales de $V_{\mathbb{K}}$ definimos el subespacio suma como:

$$U + W = \{u + w \in V : u \in U, w \in W\}$$

si además $U \cap W = \{0\}$, a esta suma la llamaremos directa y la denotaremos por $U \oplus W$.

Teo: (Grassmann) Sean U, V subespacios vectoriales de E, entonces:

$$\dim(V + U) = \dim(V) + \dim(U) - \dim(V \cap U)$$

Def: Sean U y V dos espacios vectoriales. Diremos que una función $T : U \to V$ es una transformación lineal si:

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x, y \in U \quad T(\lambda x + y) = \lambda T(x) + T(y)$$

Pro: Sea $T : U \to V$ lineal. Entonces:

1. $T(0) = 0$.
2. $T(-x) = -T(x)$.

Pro: Sean $T : U \to V$ y $F : V \to W$ lineales. Luego $F \circ T$ es lineal.

Def: Sea $T : U \to V$ una transformación lineal biyectiva, diremos entonces que T es un isomorfismo. Más aún diremos que U y V son isomorfos y lo denotaremos por $U \cong V$. Por último $\cong$ es una relación de equivalencia.

Def: Sea $T : U \to V$ una transformación lineal, definimos los siguientes subespacios asociados a T:

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} T &= \{x \in U : T(x) = 0\} = T^{-1}(\{0\}) \\ \operatorname{Im} T &= \{T(u) \in V : u \in U\} = T(U) \end{aligned}$$

Def: Sea T una transformación lineal definimos el rango y la nulidad de T como:

$$\begin{aligned} \operatorname{rango}(T) &= \dim(\operatorname{Im}(T)) \\ \operatorname{null}(T) &= \dim(\operatorname{Ker}(T)) \end{aligned}$$

Pro: Sea T transformación lineal. Entonces T es inyectiva si y sólo si $\operatorname{Ker} T = \{0\}$.

Pro: Sea $T : U \to V$ función lineal inyectiva. Entonces si $A \subseteq U$ es l.i. $T(A)$ también lo es.

Teo: (del Nucléo-Imagen) Sea $T : U \to V$ una transformación lineal donde $\dim U < \infty$, entonces:

$$\dim U = \operatorname{rango}(T) + \operatorname{null}(T)$$

Cor: Sea $T : U \to V$ lineal.

1. Si $\dim U = \dim V$:

   $$T \text{ inyectiva} \iff T \text{ sobreyectiva} \iff T \text{ biyectiva}$$

2. Si $\dim U > \dim V$, entonces T no puede ser inyectiva.
3. Si $\dim U < \dim V$ no puede ser sobreyectiva.

Cor: Dos espacios E y V de dimensión finita son isomorfos si y sólo si $\dim E = \dim V$.

Teo: Toda transformación lineal $T : U \to V$ queda determinada por su acción sobre bases. Es decir si:

$$T(u_j) = \sum_{i=1}^{q} a_{ij} v_i$$

Donde $u_j \in \beta_U$ y $v_i \in \beta_V$ son elementos de la base de U y V respectivamente. A la matriz

$$(M_{\beta_U,\beta_V}(T))_{ij} = a_{ij}$$

la llamaremos matriz representante de la transformación lineal.

Def: Sean U y V dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo, definimos el siguiente espacio vectorial (con las operaciones suma y composición):

$$\mathcal{L}(U, V) = \{T : U \to V : T \text{ es lineal}\}$$

Pro: Si $\dim U = p$ y $\dim V = q$, entonces tenemos $\mathcal{L}(U, V) \cong \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$.

Pro: Sean $M_{\beta_V\beta_W}(L)$ y $M_{\beta_U\beta_V}(T)$ matrices representantes de las transformaciones L y T, entonces :

$$M_{\beta_U\beta_V}(L \circ T) = M_{\beta_V\beta_W}(L) M_{\beta_U\beta_V}(T)$$

Pro: T es invertible si y sólo si $M_{BB'}(T)$ lo es, en dicho caso:

$$M_{BB'}(T^{-1}) = M_{BB'}(T)^{-1}$$

Pro: Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$. Las siguientes son equivalentes:

1. A es invertible.
2. $T_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ definida por $T_A(x) = Ax$ es biyectiva.
3. El conjunto $\{A_{\bullet j}\}_{j=1}^n$ es base de $\mathbb{K}^n$.