MA1102-6 Álgebra Lineal
Profesor: Mauricio Telias H.
Auxiliar: Arturo Merino F.

Completación de Bases

13 de noviembre del 2016

La idea del siguiente texto es examinar dos formas de extender un conjunto linealmente independiente a una base. Siendo más rigurosos dado un espacio vectorial V y un conjunto linealmente independiente $I \subseteq V$ queremos encontrar una base B de V tal que $I \subseteq B$. Notemos que como I lo que "falta" para ser una base es generar a V.

1. **Extensión:** La idea de este método es aprovechar la siguiente proposición válida para los conjuntos I linealmente independientes:

$$x \notin \langle I \rangle \iff I \cup \{x\} \text{ es linealmente independiente}$$

   Notemos que si I no genera todo, podemos encontrar un $x_1 \in V$ que no estamos generando. Por lo anterior $I \cup \{x_1\}$ es linealmente independiente si lo anterior tiene tamañano $\dim V$ estamos listos pues es base, sino sigo sin generar todo y por tanto puedo obtener $x_2 \in V$ que no estoy generando. El procedimiento anterior (chequear si alcanzó la dimensión y si no agregar un elemento que no se está generando), se repite hasta obtener una base.

2. **Saturación:** Otra forma es tomar una base natural, llamemosla N, de V. Notar que $I \cup N$ genera V, por lo que falla es la independencia lineal, luego basta con extraer los elementos linealmente dependientes. Una forma de hacer lo anterior es a mano (como lo hicimos en auxiliar) otra forma es construir una matriz con los vectores de $I \cup N$ y escalonarla, las columnas que queden con los pivotes serán justamente los elementos que conforman la base (para justificar esto último basta con notar que la eliminación Gaussiana justamente resta los vectores obteniendo filas nulas en los casos l.d.).

Ejemplo 1. *Tratemos de encontrar una base de $\mathbb{R}^3$ que contenga a los siguientes vectores linealmente independientes:*

$$(1,2,3)^t \qquad (1,0,1)^t$$

Para esto podemos proceder de dos formas:

- ***Extensión:*** *Estudiemos el generado por nuestros vectores l.i.*

$$\langle (1,2,3)^t, (1,0,1)^t \rangle = \{(\alpha+\beta, 2\alpha, 3\alpha+\beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

  Notemos que el vector $(0,0,1)^t$ no lo estamos generando. Esto es, pues si fuera de la forma anterior existen α y β tal que:

$$(\alpha+\beta, 2\alpha, 3\alpha+\beta) = (0,0,1)$$

  Como la igualdad de vectores es por coordenadas tenemos que:

$$\begin{aligned} \alpha+\beta &= 0 \\ 2\alpha &= 0 \\ 3\alpha+\beta &= 1 \end{aligned}$$

  El cual es un sistema contradictorio y por tanto no existen tales α y β. Concluimos que no estamos generando a $(0,0,1)$ y por tanto el conjunto:

$$\{(1,2,3)^t, (1,0,1)^t, (0,0,1)^t\}$$

  es linealmente independiente, además la dimensión del espacio original ($\mathbb{R}^3$) es 3, por tanto el conjunto anterior es base.

- ***Saturación:*** *Saturando el conjunto obtenemos:*

$$\left\{ \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$$

El cual genera todo $\mathbb{R}^3$. Para encontrar una base, basta con ir sacando los elementos linealmente dependientes, escalonando la matriz:

$$\begin{pmatrix}1&1&1&0&0\\2&0&0&1&0\\3&1&0&0&1\end{pmatrix} \xrightarrow[f_3=-3f_1+f_3]{f_2=-2f_1+f_2} \begin{pmatrix}1&1&1&0&0\\0&-2&-2&0&0\\0&-2&-3&0&1\end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{f_3=-f_2+f_3} \begin{pmatrix}1&1&1&0&0\\0&-2&-2&0&0\\0&0&1&0&1\end{pmatrix}$$

De donde como los pivotes quedan en la columnas 1, 2 y 3, los elementos 1,2 y 3 son una base de $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo 2. *Tratemos ahora de encontrar una base del siguiente espacio:*

$$V = \{ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathcal{P}_3 : a + b + c + d = 0\}$$

Es decir los polinomios de grado 3 o menor tal que la suma de sus coeficientes es 0. De manera que la base encontrada contenga al polinomio $x^2 + x - 2$, antes de empezar busquemos una base "natural" de V (esto no fue necesario en el ejemplo 1 pues conociamos una base natural de $\mathbb{R}^3$).

Notemos que $d = -a - b - c$ y por tanto el espacio V es:

$$V = \{ax^3 + bx^2 + cx - (a + b + c) : a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

Lo anterior se puede reescribir para obtener una base "natural" de este espacio:

$$V = \{a(x^3 - 1) + b(x^2 - 1) + c(x - 1) : a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

De lo anterior podemos ver que:

$$\{x^3 - 1, x^2 - 1, x - 1\}$$

Es generador de V. Además el conjunto anterior es l.i. pues ninguno de los elementos se puede escribir como combinación lineal de los otros, por tanto es base.

- ***Extensión:*** *El generado por $x^2 + x - 2$ son los polinomios de la forma:*

$$\alpha x^2 + \alpha x - 2\alpha \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Luego el polinomio $x - 1$ está en V y además no lo estamos generando. Por lo anterior $\{x - 1, x^2 + x - 2\}$ es linealmente independiente y su generado son los polinomios de la forma:

$$\beta x^2 + (\alpha + \beta)x - \alpha - 2\beta \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Notemos que $x^3 - 1$ está en V y no lo estamos generando. Por tanto $\{x - 1, x^2 + x - 2, x^3 - 1\}$ es un l.i. de tamaño 3, como $\dim V = 3$ el conjunto anterior es una base.

- ***Saturación:*** *Nuevamente completamos con la base natural para obtener el siguiente generador de V:*

$$\{x^2 + x - 2, x - 1, x^2 - 1, x^3 - 1\}$$

Notemos que si bien estos no son vectores, podemos pensar en que lo son (esto se puede formalizar como isomorfismo). Es decir, podemos pensar que el polinomio $ax^3 + bx^2 + cx + d$ es el vector (a, b, c, d) esto pues las operaciones e igualdades de polinomios son por coordenadas. Podemos obtener la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1 \leftrightarrow f_4} \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[f_3=\frac{1}{2}f_1+f_3]{f_2=\frac{1}{2}f_1+f_2} \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_3=f_2+f_3} \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_4=f_3+f_4} \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De donde los pivotes quedan en las columnas 1, 2 y 4, por tanto la base serán los elementos 1, 2 y 4, es decir:

$$\{x^2 + x - 2, x - 1, x^3 - 1\}$$

es base de V.