**MA1102-3** Álgebra Lineal
**Profesor:** Mauricio Telias H.
**Auxiliar:** Arturo Merino F.

# Auxiliar 9 : Transformaciones Lineales

7 de noviembre del 2016

**Recordemos:**

- Sean $U$ y $V$ dos espacios vectoriales. Diremos que una función $T : U \to V$ es una transformación lineal si:
$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x, y \in U \quad T(\lambda x + y) = \lambda T(x) + T(y)$$
- Sea $T : U \to V$ lineal. Entonces:
  1. $T(0) = 0$.
  2. $T(-x) = -T(x)$.
- Sean $T : U \to V$ y $F : V \to W$ lineales. Luego $F \circ T$ es lineal.
- Sea $T : U \to V$ una transformación lineal biyectiva, diremos entonces que $T$ es un isomorfismo. Más aún diremos que $U$ y $V$ son isomorfos y lo denotaremos por $U \cong V$. Por último $\cong$ es una relación de equivalencia.
- Sea $T : U \to V$ una transformación lineal, definimos los siguientes subespacios asociados a $T$:
$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} T &= \{x \in U : T(x) = 0\} \\ \operatorname{Im} T &= \{T(u) \in V : u \in U\} \end{aligned}$$
- Sea $T$ una transformación lineal definimos el rango y la nulidad de $T$ como:
$$\begin{aligned} \operatorname{rango}(T) &= \dim(\operatorname{Im}(T)) \\ \operatorname{null}(T) &= \dim(\operatorname{Ker}(T)) \end{aligned}$$
- Sea $T$ transformación lineal. Entonces $T$ es inyectiva si y sólo si $\operatorname{Ker} T = \{0\}$.
- Sea $T : U \to V$ función lineal inyectiva. Entonces si $A \subseteq U$ es l.i. $T(A)$ también lo es.

**P1. [Varios]**

*a)* Demuestre que las siguientes transformaciones son lineales:
   1) $\operatorname{tr} : \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.
   2) $\operatorname{t} : \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$, definida por $\operatorname{t}(A) = A^t$.
   3) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})$, definida por $T(x, y, z, w) = \begin{pmatrix} x & y + w \\ 2x + 2y + z + w & x + y + z \end{pmatrix}$.

*b)* Encuentre Ker y null para las transformaciones anteriores.

*c)* Encuentre Im y rango para 1) y 2).

**P2. [Propiedades de del núcleo y la imagen]**
Sea $f : U \to U$ lineal. Demuestre que:

*a)* $f \circ f \equiv 0 \iff \operatorname{Im}(f) \subseteq \operatorname{Ker}(f)$.

*b)* Encuentre una transformación lineal que verifique $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Im}(f)$.

*c)* $f \circ f \equiv f \implies U = \operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}(f)$.

*d)* Pruebe que si $V$ y $W$ son subespacios de $U$ tal que $V \oplus W = U$, entonces $\exists! T : U \to U$ lineal e idempotente tal que $\operatorname{Ker}(T) = V$ y $\operatorname{Im}(T) = W$.

**P3. [P1 Examen, Año 2012]**
Sea:

$$S = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\3\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

*a*) Encuentre una base de $S$.

*b*) Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ una aplicación lineal tal que $\mathrm{Ker}(T) = S$ y:

$$T\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \qquad T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

*c*) Determine explícitamente $T$.

*d*) Determine la dimensión de $\mathrm{Im}(T)$ y encuentre una base $\mathrm{Im}(T)$.

**P4. [Caracterización de Isomorfismo]**
La idea de este problema es probar el siguiente teorema:

**Teorema.** *Dos espacios $E$ y $V$ de dimensión finita son isomorfos si y sólo si* $\dim E = \dim V$.

Para esto proceda como sigue:

*a*) Muestre que $\dim \mathbb{K}^n = n$.

*b*) Sea $E$ un espacio vectorial tal que $\dim E = n$. Pruebe que $E \cong \mathbb{K}^n$.

*c*) Pruebe que si $T : E \to V$ es un isomorfismo y $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ es una base de $E$, entonces $T(B)$ es una base de $V$.

*d*) Concluya.

**P5. [P2 Control 5, Año 2000]**
Sean $U$ y $V$ espacios vectoriales tales que $\dim(U) = n$ y $\dim(V) = m$. Definimos $U \otimes V$ como el espacio vectorial $(U \times V, +, \cdot)$, donde $+$ y $\cdot$ estan definidos por coordenadas, es decir para $u, u_1, u_2 \in E$ y $v, v_1, v_2 \in F$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ :

$$(u_1, v_1) + (u_2, v_2) = (u_1 + u_2, v_1 + v_2) \qquad \lambda(u, v) = (\lambda u, \lambda v)$$

*Obs: No es necesario verificar que $U \otimes V$ es un espacio vectorial.*

*a*) Sea $f : U \to V$ una función. Definimos su *grafo* por:

$$G_f = \{(u, v) \in U \times V : f(u) = v\}$$

Muestre que $f$ es lineal si y sólo si $G_f$ es un s.e.v. de $U \otimes V$.

*b*) Demuestre que $(\{0\} \times V)$ es un s.e.v. de $U \otimes V$.

*c*) Sea $f : U \to V$ lineal. Demuestre que $G_f \oplus (\{0\} \times V) = U \otimes V$.

*d*) Suponga ahora que $U$ y $V$ son s.e.v. de $W$ tal que $U \cap V = \{0\}$. Demuestre que $U \otimes V \cong U \oplus V$.