**MA1102-6** Álgebra Lineal
**Profesor:** Mauricio Telias H.
**Auxiliar:** Arturo Merino F.

# Pauta 8 : Bases, Dimensión y Suma de Espacios

13 de noviembre del 2016

**P1. [Varios]**

*a*) Encuentre bases y dimensiones de $\mathbb{C}$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ y de $\mathbb{C}$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

*b*) Sea $V$ un espacio vectorial tal que $\dim V = n$. Sean $S, T$ y $U$ subespacios vectoriales de $V$ tales que:

$$S \cap T = S \cap U \qquad S + T = S + U \qquad T \subseteq U$$

Demuestre que $T = U$.

*c*) Sea $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ el subespacio de las matrices simétricas de $n \times n$. Encuentre $\dim \mathcal{S}$.

*d*) Sea $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ el subespacio de las matrices antisimétricas de $n \times n$. Demuestre que $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$. Calcule $\dim \mathcal{A}$.

**Solución 1.**

*a*) Para $\mathbb{C}_{\mathbb{C}}$ notemos que el conjunto $\{1\}$ es l.i. y que:

$$\langle \{1\} \rangle = \{z \cdot 1 \in \mathbb{C} : z \in \mathbb{C}\} = \mathbb{C}$$

Por tando $\dim \mathbb{C}_{\mathbb{C}} = 1$. Por otra parte para $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ consideremos el conjunto $\{1, i\}$, este es l.i. y además:

$$\langle \{1, i\} \rangle = \{a + bi \in \mathbb{C} : a, b \in \mathbb{R}\} = \mathbb{C}$$

Por tanto $\dim \mathbb{C}_{\mathbb{R}} = 2$.

*b*) Ocupando la fórmula de Grassmann tenemos:

$$\begin{aligned} \dim(T) &= \dim(S+T) + \dim(S \cap T) - \dim(S) \\ &= \dim(S+U) + \dim(S \cap U) - \dim(S) \\ &= \dim(U) \end{aligned}$$

Luego $T$ es un s.e.v. de $U$ de la misma dimensión. Por tanto $T = U$.

*c*) Notemos que las matrices simétricas son de la forma:

$$\begin{pmatrix} a & b & c & \cdots \\ b & d & e & \cdots \\ c & e & f & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} + \cdots$$

Donde el conjunto de matrices de la derecha es l.i. (no podemos formar ninguna matriz como combinación lineal de otras), y además genera a $\mathcal{S}$ por tanto es una base. Para contar los elementos basta notar que hay que contar los elementos de la parte superior de la matriz. Notemos el siguiente patrón:

$$\begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & 1 & 2 & 3 \\ \cdots & - & 1 & 2 \\ \cdots & - & - & 1 \end{pmatrix}$$

Luego la dimensión es la suma de los primeros $n$ naturales, por tanto:

$$\dim \mathcal{S} = \frac{n^2 + n}{2}$$

*d*) Veamos primero que están en suma, es decir todo elemento de $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ se puede escribir como un elemento de $\mathcal{A}$ más uno de $\mathcal{S}$. En efecto notemos que para toda matriz $M \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$:

$$M = \underbrace{\frac{1}{2}(M + M^t)}_{\in \mathcal{S}} + \underbrace{\frac{1}{2}(M - M^t)}_{\in \mathcal{A}}$$

Luego hay que ver que $\mathcal{A} \cap \mathcal{S} = \{0\}$, en efecto si una matriz $A$ está en la intersección, verifica $a_{ij} = a_{ji}$ y $a_{ij} = -a_{ji}$ a la vez, combinando ambas ecuaciones tenemos $a_{ij} = 0$, concluimos que $A = 0$ y que $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$. Ocupando la fórmula de Grassman:

$$\begin{array}{rcl} \dim(\mathcal{S} \oplus \mathcal{A}) & = & \dim \mathcal{S} + \dim \mathcal{A} \\ n^2 & = & \frac{n^2+n}{2} + \dim \mathcal{A} \\ \frac{n^2-n}{2} & = & \dim \mathcal{A} \end{array}$$

**P2. [Completación de Base]**

*a*) Sea $I \subseteq E$ linealmente independiente. Demuestre que:

$$x \notin \langle I \rangle \iff I \cup \{x\} \text{ es l.i.}$$

*b*) Considere los siguientes subconjuntos de espacios vectoriales con sus operaciones usuales:

$$A = \{x^3 + 2x + 1, 2x + 3\} \subseteq \mathcal{P}_3 \qquad B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})$$

Se sabe que $A$ y $B$ son l.i. en sus respectivos espacios. Extienda cada conjunto hasta encontrar una base de su respectivo espacio.

**Solución 2.**

*a*) Demostraremos que si $I$ es linealmente independiente:

$$x \in \langle I \rangle \iff I \cup \{x\} \text{ es l.d.}$$

Además para ahorrar notación enumeremos los elementos de $I$, esto es $I = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.

- ( $\Longrightarrow$ )
  Notemos que si $x \in \langle I \rangle$, entonces:
  $$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$$
  Luego como uno de los elementos de $I \cup \{x\}$ (en particular $x$) se puede escribir como combinación lineal de los otros elementos de $I \cup \{x\}$, el conjunto es linealmente dependiente.
- ( $\Longleftarrow$ )
  Si $I \cup \{x\}$ es l.d., entonces existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$ no todos nulos, tal que:
  $$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n + \lambda_{n+1} x = 0$$
  Nos gustaría que $\lambda_{n+1}$ fuese distinto de cero. Supongamos en busca de una contradicción que $\lambda_{n+1} = 0$, luego:
  $$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$$
  Donde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ no son todos nulos, esto contradecería el hecho que $I$ es linealmente independiente. Como $\lambda_{n+1} \neq 0$, entonces:
  $$x = \sum_{i=1}^{n} -\frac{\lambda_i}{\lambda_{n+1}} v_i$$
  Es decir $x$ se puede escribir como combinación lineal de elementos de $I$ y por ende $x \in \langle I \rangle$.

*b*) La idea en general es usar la proposición de la parte *a*) repetidas veces para expandir nuestros conjuntos hasta alcanzar la dimensión del espacio (luego concluiríamos pues tendríamos un conjunto l.i. de dimensión igual al espacio).

1) Notemos que
   $$\langle A \rangle = \{\alpha x^3 + 2(\alpha + \beta)x + \alpha + 3\beta : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$
   Sea $p_1 \notin \langle A \rangle$, por ejemplo tomemos $p_1 = x^2$, por *a*) $B \cup \{p_1\}$ es linealmente independiente. Sea ahora $p \in \langle B \cup p_1 \rangle$, entonces
   $$\langle A \cup \{p_1\} \rangle = \{\alpha x^3 + \gamma x^2 + 2(\alpha + \beta)x + \alpha + 3\beta : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$$
   Tomemos $p_2 \notin \langle B \cup \{p_1\} \rangle$, como por ejemplo $p_2 = x + 1$. Luego $B \cup \{p_1, p_2\}$ es linealmente independiente de cardinal igual que la dimensión del espacio ($\dim \mathcal{P}_3 = 4$) y por tanto base.

2) De la misma manera:

$$\langle B\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha+\gamma & 2(\alpha+\beta) \\ 4\alpha & 4\alpha+5\beta+\gamma \end{pmatrix} : \alpha, \beta, \gamma \right\}$$

Tomemos un $X \notin \langle B\rangle$, como por ejemplo $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, luego $C \cup \{X\}$ es base.

**P3. [P3 Control 2, Año 2013]**
Sea $V \subseteq \mathcal{M}_{33}(\mathbb{R})$ el espacio de vectorial de las matrices triangulares superiores. Se define:

$$W = \{A \in V : \text{la suma de cada fila de } A \text{ es cero}\}$$

*a*) Pruebe que $W$ es subespacio vectorial de $V$.

*b*) Pruebe que:
$$G = \left\{ \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \right\}$$
es un generador de $W$.

*c*) Extraiga de $G$ una base para $W$.

*d*) Sea $U = \{A \in \mathcal{M}_{33}(\mathbb{R}) : A \text{ es diagonal}\}$. Pruebe que $V = W \oplus U$.

**Solución 3.**

*a*) Es claro que $W \neq \emptyset$ (pues $0 \in W$). Sean $A, B \in W$, $\lambda \in \mathbb{R}$, luego:

$$\begin{aligned}\lambda A + B &= \begin{pmatrix}\lambda a & \lambda b & \lambda(-a-b)\\ 0 & \lambda d & \lambda(-d)\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}f & g & -f-g\\ 0 & h & -h\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\lambda a + f & \lambda b + g & \lambda(-a-b) - f - g\\ 0 & \lambda d + h & \lambda(-d) - h\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Lo último está en $W$ pues sus filas suman 0.

*b*) Basta con ver que todo elemento de $W$ se puede escribir como una combinación lineal de elementos de $G$. En efecto:

$$\begin{pmatrix}a & b & -b-a\\ 0 & c & -c\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

*c*) Notemos que como no ocupamos la última matriz en generar a $W$ tenemos que:

$$\left\langle \left\{ \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \right\} \right\rangle = W$$

Faltaría demostrar que son l.i., en efecto:

$$a\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & b & -b-a\\ 0 & c & -c\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

De donde se concluye que $a, b, c = 0$ y por tanto el conjunto es l.i. y base.

*d*) Veamos primero que $W \cap U = \{0\}$, en efecto sea $A \in W \cap U$, como $A$ es diagonal tenemos que:

$$A = \begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & c\end{pmatrix}$$

Además como cada fila debe sumar 0 tenemos que $a = 0, b = 0$ y $c = 0$, por tanto $A = 0$, más aún $A \in W \cap U$. Para ver que $V = W \oplus U$ tenemos que demostrar que toda matriz en $V$ se puede escribir como la suma de una en $W$ y una en $U$, basta notar que:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a+b+c & 0 & 0 \\ 0 & d+e & 0 \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}}_{\in U} + \underbrace{\begin{pmatrix} -b-c & b & c \\ 0 & -e & e \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\in W}$$

De donde concluimos que $V = W \oplus U$.
*Obs: Otra forma de hacer esto es demostrar que* $\dim(W \oplus U) = 6$*, luego sería un subespacio de igual dimensión a* $V$ *y por tanto* $V = W \oplus U$*.*

**P4. [Bases]**
Sea $E$ un espacio vectorial tal que $\dim(E) = n$.

*a*) Diremos que $B$ es l.i. maximal si $B$ es linealmente independiente y para todo $x \in E$, el conjunto $B \cup \{x\}$ es linealmente dependiente. Demuestre que:

$$B \text{ es l.i. maximal} \iff B \text{ es base}$$

*b*) Diremos que $B$ es un conjunto generador minimal si $\langle B \rangle = E$ y para todo $x \in B$, tenemos que $\langle B \setminus \{x\} \rangle \neq E$. Demuestre que:

$$B \text{ es generador minimal} \iff B \text{ es base}$$

*Hint: Demuestre que si $D$ es linealmente dependiente, entonces $\exists x \in D$ tal que $\langle D \setminus \{x\} \rangle = \langle D \rangle$.*

*c*) Sea $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ una base de $E$. Demuestre que:

$$E = \bigoplus_{i=1}^{n} \langle b_i \rangle = \langle b_1 \rangle \oplus \langle b_2 \rangle + \ldots + \langle b_n \rangle$$

**Solución 4.**

*a*)
- ( $\Longleftarrow$ )
Si $B$ es base, entonces es linealmente independiente. Además $|B \cup \{x\}| = n+1 > n$ y por tanto $B \cup \{x\}$ es linealmente dependiente.
- ( $\Longrightarrow$ )
Nos falta con probar que es generador. Supongamos que no lo es, es decir $\langle B \rangle \neq E$, luego tenemos que existe $x \notin \langle B \rangle$, por la $P2$ parte $a$) sabemos que $B \cup \{x\}$ es l.i., lo que contradice el hecho que $B$ era l.i. maximal.

*b*)
- ( $\Longleftarrow$ )
Si $B$ es base, entonces $\langle B \rangle = E$. Supongamos que $\langle B \setminus \{x\} \rangle = E$, en este caso tenemos que $B \setminus \{x\}$ es una base (pues es generador y al ser subconjunto de un l.i. es l.i.), esto contradice el hecho de que todas las bases tienen el mismo cardinal, por tanto $\langle B \setminus \{x\} \rangle \neq E$.
- ( $\Longrightarrow$ )
Probemos primero el hint. En efecto si $D$ es l.d., entonces existe un elemento que se puede escribir como combinación lineal de los otros, llamemos a dicho elemento $x$ y al resto como $\{v_1, \ldots, v_k\}$, luego:

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$$

Luego:

$$\begin{aligned}
\langle D \rangle &= \left\{ \sum_{i=1}^{k} \mu_i v_i + \mu_{k+1} x : \mu_i \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ \sum_{i=1}^{k} \mu_i v_i + \mu_{k+1} \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i : \mu_i \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ \sum_{i=1}^{k} \underbrace{(\mu_i + \mu_{k+1}\lambda_i)}_{c_i} v_i : \mu_i \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ \sum_{i=1}^{k} c_i v_i : \mu_i \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \langle D \setminus \{x\} \rangle
\end{aligned}$$

Demostremos el resultado buscado. Nos falta ver que el conjunto $B$ es l.i., supongamos entonces que es linealmente dependiente. Al ser linealmente dependiente existe un $x \in B$ tal que $\langle B \setminus \{x\} \rangle \neq E$, lo que contradice el hecho de que $B$ es generador minimal. Concluimos que $B$ es l.i., además como es generador es base.

*c*) Razonemos por inducción sobre la dimensión del espacio.

- **Caso Base:** $(n = 2)$
  Demostremos primero que $\langle \{b_1\} \rangle \cap \langle \{b_2\} \rangle = \{0\}$. En efecto si $x \in \langle \{b_1\} \rangle \cap \langle \{b_2\}$, entonces $x = \lambda_1 b_1$ y $x = \lambda_2 b_2$, notemos que si $\lambda_1 \neq 0$, entonces $b_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} b_1$ , lo que contradeciría la independencia lineal de $\{b_1, b_2\}$, por tanto $x = 0$ y $\langle \{b_1\} \rangle \cap \langle \{b_2\} \rangle = \{0\}$. Para lo otro notemos que si $x \in E$, entonces se puede escribir como combinación lineal de elementos de la base, es decir:

$$\begin{aligned} E &= \{x = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 : \lambda_i \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x = \mu_1 u + \mu_2 v : \mu \in \mathbb{R}, u \in \langle \{b_1\} \rangle, v \in \langle \{b_2\} \rangle\} \\ &= \langle \{b_1\} \rangle \oplus \langle \{b_2\} \rangle \end{aligned}$$

- **Hipótesis Inductiva:**
  Si $E$ es un espacio tal que $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ es una base de $E$, entonces $E = \bigoplus_{i=1}^n \langle b_i \rangle$.
- **Paso Inductivo:**
  Consideremos $E$ un espacio tal que $B = \{b_1, \ldots, b_{n+1}\}$ es una base de $E$. Definamos $B' = \{b_1, \ldots, b_n\}$, queremos probar que:

$$E = \langle B' \rangle \oplus \langle \{b_n\} \rangle$$

Probemos primero que intersectan en cero, en efecto sea $x \in \langle B' \rangle \cap \langle \{b_n\} \rangle$. Luego $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i$ y además $x = \lambda_{n+1} b_{n+1}$, notemos que si $\lambda_{n+1} \neq 0$ entonces:

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^n -\frac{\lambda_i}{\lambda_{n+1}} b_i$$

Lo que contradecería la independencia lineal de $B$, por tanto $x = 0$ y más aún $\langle B' \rangle \cap \langle \{b_n\} \rangle = \{0\}$. Para ver que estan en suma, recordemos que todo elemento de $E$ se puede escribir como combinación lineal de elementos de la base, luego:

$$\begin{aligned} E &= \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i + \lambda_{n+1} b_{n+1} : \lambda_i \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \{\mu_1 v + \mu_2 u : \mu \in \mathbb{R}, v \in \langle B' \rangle, u \in \langle \{b_{n+1}\} \rangle\} \\ &= \langle B' \rangle \oplus \langle \{b_n\} \rangle \end{aligned}$$

Notemos además que como $\langle B' \rangle$ es un espacio de dimensión $n$ tenemos que $\langle B' \rangle = \bigoplus_{i=1}^{n} \langle \{b_i\} \rangle$, concluimos entonces que:

$$E = \langle B' \rangle \oplus \langle \{b_n\} \rangle = \bigoplus_{i=1}^{n+1} \langle \{b_i\} \rangle$$

**P5. [P3 *a*) Control 5, Año 2004]**
Consideremos el espacio $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ dotado de las operaciones usuales sobre $\mathbb{R}$. Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ y $V \subseteq \mathbb{R}^n$, definimos:

$$A(V) = \{Ax : x \in V\}$$

*a*) Pruebe que si $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ y $V$ es s.e.v. de $\mathbb{R}^n$ entonces $A(V)$ también es s.e.v. de $\mathbb{R}^n$.

*b*) Sean $V$ y $W$ s.e.v. de $\mathbb{R}^n$ tales que $V \oplus W = \mathbb{R}^n$. Pruebe que si $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ es invertible, entonces $A(V) \oplus A(W) = \mathbb{R}^n$.

*c*) Sean $V$ y $W$ s.e.v. de $\mathbb{R}^n$ tales que $V \oplus W = \mathbb{R}^n$. Pruebe que si $A(V) \oplus A(W) = \mathbb{R}^n$, entonces $A$ es invertible.

**Solución 5.**

*a*) Sean $\vec{x}, \vec{y} \in A(V)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, queremos probar que $\lambda\vec{x} + \vec{y} \in A(V)$. Supongamos $\vec{x} = Ax$ y $\vec{y} = Ay$, con $x, y \in V$. Luego:

$$\lambda\vec{x} + \vec{y} = \lambda Ax + Ay = A\underbrace{(\lambda x + y)}_{\in V} \in A(V)$$

*b*) Como $A$ es invertible, la función $f(x) = Ax$ es una biyección de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Por tanto todo $r \in \mathbb{R}^n$ se puede escribir como $At \in \mathbb{R}^n$ para algún $t \in \mathbb{R}^n$, este $t$ ademas se puede escribir de la forma $t = v + w$ con $v \in V$ y $w \in W$. Es decir:

$$r = At = A(v + w) = Av + Aw$$

De donde tenemos $\mathbb{R}^n = A(V) + A(W)$. Luego hay que ver que $A(V) \cap A(W) = \{0\}$.Definamos $f(x) = Ax$, notemos que $f(V) = A(V)$ y $f(W) = A(W)$. Luego como $f$ es biyección (pues $A$ es invertible) tenemos:

$$A(V) \cap A(W) = f(V) \cap f(W) = f(V \cap W) = f(\{0\}) = \{0\}$$

De donde tenemos finalmente que $\mathbb{R}^n = A(V) \oplus A(W)$.

*c*) Como $\mathbb{R}^n = A(V) + A(W)$, tenemos que todo $r = Av + Aw = A(v + w)$, es decir la función $f(x) = Ax$ con $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es sobreyectiva, con lo que concluimos que $A$ es invertible.