MA1102-6 Álgebra Lineal
Profesor: Mauricio Telias H.
Auxiliar: Arturo Merino F.

Auxiliar 8 : Bases, Dimensión y Suma de Espacios

3 de noviembre del 2016

Recordemos:

Def: Sean $G = \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq E$ con E espacio vectorial. Definimos el generado por G como:

$$\langle\{v_1, \dots, v_n\}\rangle = \left\{ v \in V : v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i,\ \lambda_i \in \mathbb{K} \right\}$$

Diremos también que G genera a $\langle G \rangle$.

Pro: $\langle G \rangle$ es un subespacio vectorial de E, además es el subespacio vectorial más pequeño que contiene a G.

Def: Dado un espacio vectorial V, diremos que un conjunto A es una base de V si:

1. A es linealmente independiente.
2. $E = \langle A \rangle$

Pro: Sea E un espacio vectorial, B será una base de E si y sólo si todo $v \in E$ se puede escribir de manera única como combinación lineal de elementos de B.

Pro: Sea E un espacio vectorial e G un conjunto tal que $\langle G \rangle = E$, entonces existe un conjunto A tal que $G \backslash A$ es una base de E.

Pro: Sea E un espacio vectorial e I un conjunto l.i., entonces existe un conjunto B tal que $I \cup B$ es una base de E.

Pro: Sea B una base tal que $|B| = n$ y un conjunto X tal que $|X| > n$. Entonces X es linealmente dependiente.

Pro: Sea B una base tal que $|B| = n$. Luego el cardinal de todas las bases es n.

Def: Sea B una base de V, definimos la dimensión como $\dim V = |B|$.

Teo: Sea V un e.v. tal que $\dim V = n$.

1. Todo conjunto X l.i. tal que $|X| = n$ es base.
2. Sea U un s.e.v. de V, entonces $\dim U \leq \dim V$. Además si $\dim U = \dim V$, entonces $U = V$.

Def: Sean U y W subespacios vectoriales de $V_{\mathbb{K}}$ definimos el subespacio suma como:

$$U + W = \{u + w \in V : u \in U, w \in W\}$$

si además $U \cap W = \{0\}$, a esta suma la llamaremos directa y la denotaremos por $U \oplus W$.

Teo: (Grassmann) Sean U, V subespacios vectoriales de E, entonces:

$$\dim(V + U) = \dim(V) + \dim(U) - \dim(V \cap U)$$

P1. [Varios]

a) Encuentre bases y dimensiones de $\mathbb{C}$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ y de $\mathbb{C}$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

b) Sea V un espacio vectorial tal que $\dim V = n$. Sean S, T y U subespacios vectoriales de V tales que:

$$S \cap T = S \cap U \qquad S + T = S + U \qquad T \subseteq U$$

Demuestre que $T = U$.

c) Sea $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ el subespacio de las matrices simétricas de $n \times n$. Encuentre $\dim \mathcal{S}$.

d) Sea $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ el subespacio de las matrices antisimétricas de $n \times n$. Demuestre que $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$. Calcule $\dim \mathcal{A}$.

P2. [Completación de Base]

a) Sea $I \subseteq E$ linealmente independiente. Demuestre que:

$$x \notin \langle I \rangle \iff I \cup \{x\} \text{ es l.i.}$$

b) Considere los siguientes subconjuntos de espacios vectoriales con sus operaciones usuales:

$$A = \{x^3 + 2x + 1, 2x + 3\} \subseteq \mathcal{P}_3 \qquad B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})$$

Se sabe que A y B son l.i. en sus respectivos espacios. Extienda cada conjunto hasta encontrar una base de su respectivo espacio.

P3. [P3 Control 2, Año 2013]
Sea $V \subseteq \mathcal{M}_{33}(\mathbb{R})$ el espacio de vectorial de las matrices triangulares superiores. Se define:

$$W = \{A \in V : \text{la suma de cada fila de } A \text{ es cero}\}$$

a) Pruebe que W es subespacio vectorial de V.

b) Pruebe que:

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

es un generador de W.

c) Extraiga de G una base para W.

d) Sea $U = \{A \in \mathcal{M}_{33}(\mathbb{R}) : A \text{ es diagonal}\}$. Pruebe que $V = W \oplus U$.

P4. [Bases]
Sea E un espacio vectorial tal que $\dim(E) = n$.

a) Diremos que B es l.i. maximal si B es linealmente independiente y para todo $x \in E$, el conjunto $B \cup \{x\}$ es linealmente dependiente. Demuestre que:

$$B \text{ es l.i. maximal} \iff B \text{ es base}$$

b) Diremos que B es un conjunto generador minimal si $\langle B \rangle = E$ y para todo $x \in B$, tenemos que $\langle B \setminus \{x\} \rangle \neq E$. Demuestre que:

$$B \text{ es generador minimal} \iff B \text{ es base}$$

Hint: Demuestre que si D es linealmente dependiente, entonces $\exists x \in D$ tal que $\langle D \setminus \{x\} \rangle = \langle D \rangle$.

c) Sea $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ una base de E. Demuestre que:

$$E = \bigoplus_{i=1}^{n} \langle b_i \rangle = \langle b_1 \rangle \oplus \langle b_2 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle b_n \rangle$$

P5. [P3 *a)* Control 5, Año 2004]
Consideremos el espacio $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ dotado de las operaciones usuales sobre $\mathbb{R}$. Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ y $V \subseteq \mathbb{R}^n$, definimos:

$$A(V) = \{Ax : x \in V\}$$

a) Pruebe que si $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ y V es s.e.v. de $\mathbb{R}^n$ entonces $A(V)$ también es s.e.v. de $\mathbb{R}^n$.

b) Sean V y W s.e.v. de $\mathbb{R}^n$ tales que $V \oplus W = \mathbb{R}^n$. Pruebe que si $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ es invertible, entonces $A(V) \oplus A(W) = \mathbb{R}^n$.

c) Sean V y W s.e.v. de $\mathbb{R}^n$ tales que $V \oplus W = \mathbb{R}^n$. Pruebe que si $A(V) \oplus A(W) = \mathbb{R}^n$, entonces A es invertible.