MA1102-6 Álgebra Lineal
Profesor: Mauricio Telias H.
Auxiliar: Arturo Merino F.

Pauta 7 : Espacios Vectoriales e Independencia Lineal

13 de noviembre del 2016

P1. [Varios de Espacios Vectoriales]

a) Muestre que $(\mathcal{P}(X), \Delta, \cdot)$ sobre $\mathbb{Z}_2$ es un espacio vectorial. Donde X es un conjunto fijo y $\cdot$ esta definido de la siguiente manera:
$$\forall A \subseteq X : \quad 1 \cdot A = A \quad \text{y} \quad 0 \cdot A = \emptyset$$

b) Sea E un espacio vectorial y $V, U \subseteq E$ subespacios vectoriales de E. Demuestre que $V \cup U$ es un subespacio de E si y sólo si $V \subseteq U$ o $U \subseteq V$.

c) Demuestre que $\mathbb{K}$ sobre $\mathbb{F}$ es un espacio vectorial. Donde $\mathbb{K}$ es un cuerpo y $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{K}$ un subcuerpo de $\mathbb{K}$.
Obs : De esto se deduce que $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$ son espacios vectoriales.

Solución 1.

a) Veamos que se satisfacen las propiedades:

Pr1. $(\mathcal{P}(X), \Delta)$ es un grupo abeliano. Además $\mathbb{Z}_2$ es un cuerpo.

Pr2. La segunda operación se puede ver como una ley de composición externa $\cdot : \mathbb{Z}_2 \times \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$.

Ev1. Tres casos.
1) $(0+0)A = \emptyset = \emptyset \Delta \emptyset = 0A\Delta 0A$
2) $(1+0)A = A = A\Delta\emptyset = 1A\Delta 0A$
3) $(1+1)A = 0A = \emptyset = A\Delta A = 1A\Delta 1A$

Ev2. Dos casos.
1) $0(A\Delta B) = \emptyset = \emptyset\Delta\emptyset = 0A\Delta 0B$
2) $1(A\Delta B) = A\Delta B = 1A\Delta 1B$

Ev3. Cuatro casos.
1) $0(0A) = \emptyset = 0A = (0 \cdot 0)A$
2) $0(1A) = 0A = (1 \cdot 0)A$
3) $1(0A) = 1\emptyset = \emptyset = 0A = (0 \cdot 1)A$
4) $1(1A) = 1A = (1 \cdot 1)A$

Ev4. $1A = A$

b)
- $(\Longleftarrow)$
Supongamos sin perdida de generalidad que $V \subseteq U$ luego $U \cup V = U$, como U es subespacio concluimos.
- $(\Longrightarrow)$
Supongamos que $V \nsubseteq U$, pues sino estamos listos. Mostremos que $U \subseteq V$. Sea $x \in U$ e $y \in V \setminus U$. Luego como $x, y \in U \cup V$, como $U \cup V$ es subespacio tenemos que $x + y \in U \cup V$, luego esto significa que $x + y \in U$ o $x + y \in V$. Si $x + y \in U$, entonces como U es subespacio, tenemos que $y = (x+y) + (-x) \in U$ lo que es imposible pues $y \in V \setminus U$, concluimos que $x + y \in V$. Luego escribiendo $x = (x + y) - y \in V$. Como el x era arbitrario concluimos $U \subseteq V$.

c) Veamos que se satisfacen las propiedades:

Pr1. $(\mathbb{K}, +)$ es un grupo abeliano pues es cuerpo. Ademas $\mathbb{F}$ es un cuerpo por enunciado.

Pr2. La segunda operación de $\mathbb{K}$ se puede ver como una ley de composición externa $\cdot : \mathbb{F} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$.

Ev1. $(f_1 + f_2)k = f_1k + f_2k$

Ev2. $f(k_1 + k_2) = fk_1 + fk_2$

Ev3. $f_1(f_2k) = (f_1f_2)k$

Ev4. $1_{\mathbb{F}}k = k$

P2. [Varios de Independencia Lineal]
Justifique si los siguientes conjuntos son linealmente independientes o dependientes:

a) Las columnas de una matriz $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ invertible en el espacio $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$.

b) Tres puntos colineales en $\mathbb{R}^3$ en el espacio $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

c) $\left\{ \sum_{i=0}^{k} x^i \in \mathcal{P}_n : k \leq n \right\}$ en el espacio de los polinomios de grado a lo más n $(\mathcal{P}_n)$ con las operaciones usuales.

d) $\{\sin^2(x), 2x, e^x, x+1, \cos^2(x)\}$ en el espacio de las funciones a valores reales con las operaciones usuales.

Solución 2.

a) Si A es invertible, entonces A^t también lo es, luego A^t es fila-equivalente a la identidad, por tanto no se puede producir un vector como combinación lineal de otros (si no podriamos construir una fila de puros ceros). Concluimos entonces que las filas de A^t son l.i. y por tanto las columnas de A también.

b) Si tres puntos son colineales, satisfacen la misma ecuación de la recta. Supongamoslos ademas distintos (si no son l.d.) es decir $P = S + pD$, $Q = S + qD$ y $R = S + rD$ (con $p \neq q \neq r$) luego notemos que:

$$P - Q = \frac{p-q}{p-r}(P - R) \implies Q = P - \frac{p-q}{p-r}(P - R)$$

Luego Q se escribe como combinación lineal de P y R, por tanto el conjunto es l.d.

c) Sea $\{\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \subseteq \mathbb{R}$ y $p_i(x) = \sum_{j=0}^{i} x^j$. Luego :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} \lambda_i p_i(x) &= \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \sum_{j=0}^{i} x^j \\
&= \lambda_0 x^0 + \lambda_1(x^0 + x^1) + \lambda_2(x^0 + x^1 + x^2) + \ldots + \lambda_n(x^0 + x^1 + x^2 + \ldots + x^n) \\
&= (\lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_{n-1} + \lambda_n)x^0 + (\lambda_1 + \ldots + \lambda_{n-1} + \lambda_n)x^1 + \ldots + (\lambda_{n-1} + \lambda_n)x^{n-1} + \lambda_n x^n
\end{aligned}$$

Luego para que la suma sea el polinomio 0 tiene que ocurrir ser cero el coeficiente que acompaña a cada x^j, notemos que entonces $\lambda_n = 0$, de la penultima ecuación tenemos que $\lambda_{n-1} + \lambda n = 0$ y por tanto λ_{n-1}. Repitiendo el razonamiento anterior concluimos que $\lambda_i = 0$ para todo $\lambda_i \in \Lambda$, por tanto el conjunto es linealmente independiente.

d) Veamos que:

$$x + 1 = \frac{1}{2}2x + \sin^2(x) + \cos^2(x)$$

Por lo que el conjunto es linealmente dependiente.

P3. [P1 *b*1) **Control 1, Año 2014 + P3** *a*) **y** *b*) **Control 2, Año 2012]**

a) Sea V el conjunto de las matrices de 3×3 con coeficientes reales definido por:

$$V = \left\{ A \in \mathcal{M}_{33}(\mathbb{R}) : A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix},\ a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Demuestre que V es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_{33}(\mathbb{R})$.

b) Definimos:

$$W_a = \{A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}) : \operatorname{tr}(A) = a\} \qquad \operatorname{tr(A)} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Demuestre que W_a es un s.e.v. de $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ si y sólo si $a = 0$.

c) Sean $p, q \in \mathcal{P}_n$ tales que $\{p, q\}$ es linealmente independiente. Demuestre que $\{p, q, pq\}$ es linealmente independiente si y sólo si grado$(p) \geq 1$ y grado$(q) \geq 1$.

Solución 3.

a) Notemos primero que $V \neq \emptyset$, pues $0 \in V$. Sean $\lambda \in \mathbb{R}$ y $A, B \in V$, entonces:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} c & d & d \\ d & c & d \\ d & d & c \end{pmatrix} \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

Luego queremos ver que $A + \lambda B \in V$, en efecto:

$$\begin{aligned} A + \lambda B &= \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} c & d & d \\ d & c & d \\ d & d & c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda c & \lambda d & \lambda d \\ \lambda d & \lambda c & \lambda d \\ \lambda d & \lambda d & \lambda c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a+\lambda c & b+\lambda d & b+\lambda d \\ b+\lambda d & a+\lambda c & b+\lambda d \\ b+\lambda d & b+\lambda d & a+\lambda c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Tomando $u = a + \lambda c$ y $v = b + \lambda d$, tenemos que:

$$A + \lambda B = \begin{pmatrix} u & v & v \\ v & u & v \\ v & v & u \end{pmatrix}$$

Por tanto $A + \lambda B \in V$ y más aún V es s.e.v. de $\mathcal{M}_{33}(\mathbb{R})$.

b)
- ($\Longleftarrow$)
  Demostremos que W_0 es s.e.v. de $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$, es claro que $W_0 \neq \emptyset$, pues $0 \in W_0$. Sean $A, B \in W_0$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, queremos ver que $A + \lambda B \in W_0$, en efecto:

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(A + \lambda B) &= \sum_{i=1}^{n} (a + \lambda b)_{ii} \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \lambda b_{ii} \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \lambda \sum_{i=1}^{n} b_{ii} \\ &= \underbrace{\operatorname{tr}(A)}_{=0} + \lambda \underbrace{\operatorname{tr}(B)}_{=0} = 0 \end{aligned}$$

De donde tenemos que $A + \lambda B \in W_0$ y por tanto W_0 es s.e.v.

- ($\Longrightarrow$)
  Notemos que si W_a es s.e.v., entonces tenemos que si $x \in W_a$, ocurre que $-x \in W_a$ y por tanto $0 = x - x \in W_a$. Luego:
  $$a = \operatorname{tr}(0) = 0$$
  De donde concluimos.

c)

- ($\Longrightarrow$)
  Supongamos en busca de una contradicción (y sin perdida de generalidad) que $\operatorname{gr}(p) \leq 0$, es decir $p = c$ para alguna $c \in \mathbb{R}$, pero entonces $\{p, q, pq\} = \{c, q, cq\}$ no es l.i. (pues $0 \cdot c + c \cdot q - cq = 0$), lo que es una contradicción.
- ($\Longleftarrow$)
  Supongamos en busca de una contradicción que $\{p, q, pq\}$ es l.d., luego existen $a, b, c \in \mathbb{R}$:
  $$ap + bq + cpq = 0$$
  Notemos que $c \neq 0$, pues si lo fuera:
  $$ap + bq = 0$$
  Lo que contradice el hecho de que p y q son l.i.. Luego:
  $$-pq = \frac{ap + bq}{c}$$
  Por otro lado $a \neq 0$ y $b \neq 0$ (pues si fueran 0, tenemos SPG $bq = -cpq$ lo que implica $b = -cp$, es decir que $\operatorname{grado}(p) \leq 0$). Por lo tanto:
  $$\operatorname{grado}(pq) = \operatorname{grado}\left(\frac{a}{c}p + \frac{bq}{q}\right) \leq \operatorname{máx}\{\operatorname{grado}(p), \operatorname{grado}(q)\}$$
  Pero como el grado de p y q son ambos mayores que 1, el grado de pq es estrictamente mayor que el grado de p y el grado de q. Por tanto:
  $$\operatorname{máx}\{\operatorname{grado}(p), \operatorname{grado}(q)\} < \operatorname{grado}(pq) \leq \operatorname{máx}\{\operatorname{grado}(p), \operatorname{grado}(q)\}$$
  lo que implicaria $\operatorname{máx}\{\operatorname{grado}(p), \operatorname{grado}(q)\} < \operatorname{máx}\{\operatorname{grado}(p), \operatorname{grado}(q)\}$ que no es posible.

P4. [Encuentre un generador]
Encuentre un generador para los siguientes espacios vectoriales si $n = 3$ y en el caso general.

a) $U = \{A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}) : A \text{ es simétrica}\}$

b) $V = \{p(x) \in \mathbb{R}_n[x] : p(-1) = 0\}$

c) $W = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, e_1\rangle = \langle x, e_n\rangle\}$, donde e_i es un vector de sólo ceros salvo en la coordenada i.

Solución 4. Veremos los casos $n = 3$, las generalizaciones son similares.

a)

$$\begin{aligned}
U &= \{A \in \mathcal{M}_{33}(\mathbb{R}) : A \text{ es simétrica}\} \\
&= \{A \in \mathcal{M}_{33}(\mathbb{R}) : A = A^t\} \\
&= \left\{ A \in \mathcal{M}_{33}(\mathbb{R}) : A = \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}, a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ A = a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

es un generador de U.

b)

$$\begin{aligned}
V &= \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] : p(-1) = 0\} \\
&= \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] : a(-1)^3 + b(-1)^2 + c(-1) + d = 0, \quad a,b,c,d \in \mathbb{R}\} \\
&= \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] : -a + b - c + d = 0, \quad a,b,c,d \in \mathbb{R}\} \\
&= \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] : a = b - c + d, \quad a,b,c,d \in \mathbb{R}\} \\
&= \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] : p(x) = (b - c + d)x^3 + bx^2 + cx + d, \quad b,c,d \in \mathbb{R}\} \\
&= \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] : p(x) = b(x^3 + x^2) + c(-x^3 + x) + d(x^3 + 1), \quad b,c,d \in \mathbb{R}\} \\
&= \langle\{x^3 + x^2, -x^3 + x, x^3 + 1\}\rangle
\end{aligned}$$

De donde tenemos que $\{x^3 + x^2, -x^3 + x, x^3 + 1\}$ es un generador de V.

c)

$$\begin{aligned}
W &= \{x \in \mathbb{R}^3 : \langle x, e_1 \rangle = \langle x, e_3 \rangle\} \\
&= \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_3\} \\
&= \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : x = \begin{pmatrix} a \\ b \\ a \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : x = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle
\end{aligned}$$

De donde tenemos que

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

es un generador de W.

P5. [P2 Control 2, Año 2014-β]

a) Considere en $\mathbb{R}^2$ las siguientes operaciones $\forall(x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2$ y $\forall \lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}x+x'-2\\y+y'-1\end{pmatrix}\\ \lambda \odot \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} &= \lambda\begin{pmatrix}x-2\\y-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Demuestre que $\mathbb{R}^2$ dotado de las operaciones anteriores es un e.v. sobre $\mathbb{R}$.

b) Sea $V = \mathcal{P}_5(x)$ el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de los polinomios con grado menor o igual que 5 con coeficientes en $\mathbb{R}$. Demuestre que:

$$W = \{p \in \mathcal{P}_5 : p'(x) + p'''(x) = 0\}$$

es un subespacio vectorial de V.

Solución 5.

a) Veamos que se satisfacen las propiedades:

Pr1. $(\mathbb{R}^2, \oplus)$ es un grupo abeliano. Ademas $\mathbb{R}$ es un cuerpo.

Pr2. Notemos que $\odot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una l.c.e.

Ev1. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $(x,y),(w,z) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}(a+b)\odot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} &= (a+b)\begin{pmatrix}x-2\\y-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}a(x-2)+b(x-2)+2\\a(y-1)+b(y-1)+1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}[a(x-2)+2]+[b(x-2)+2]-2\\ [a(y-1)+1]+[b(y-1)+1]-1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}a(x-2)+2\\a(y-1)+1\end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix}b(x-2)+2\\b(y-1)+1\end{pmatrix}\\ &= \left[a\begin{pmatrix}x-2\\y-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right] \oplus \left[b\begin{pmatrix}x-2\\y-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right]\\ &= \left[a\odot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right] \oplus \left[a\odot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right]\end{aligned}$$

Ev2.

$$\begin{aligned}a\odot\left[\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}w\\z\end{pmatrix}\right] &= a\odot\left[\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}w\\z\end{pmatrix}\right]\\ &= a\odot\begin{pmatrix}x+w-2\\y+z-1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}a(x+w-4)+2\\a(y+z-2)+1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}[a(x-2)+2]+[a(w-2)+2]-2\\ [a(y-1)+1]+[a(z-1)+1]-1]\end{pmatrix}\\ &= \left[\begin{pmatrix}a(x-2)\\a(y-1)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right] \oplus \left[\begin{pmatrix}a(w-2)\\a(z-1)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right]\\ &= \left[a\odot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right] \oplus \left[a\odot\begin{pmatrix}w\\z\end{pmatrix}\right]\end{aligned}$$

Ev3.

$$
\begin{aligned}
a \odot \left[b \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right] &= a \odot \begin{pmatrix} b(x-2)+2 \\ b(y-1)+1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} ab(x-2)+2 \\ ab(y-1)+1 \end{pmatrix} \\
&= (ab) \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Ev4.

$$
\begin{aligned}
1 \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x-2+2 \\ y-1+1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

b) Es claro que $W \subseteq V$ y que $W \neq \emptyset$, pues $0 \in W$. Queremos ver que si $\lambda \in \mathbb{R}$, $p, q \in W$, entonces $\lambda p + q \in W$. En efecto:

$$
\begin{aligned}
(\lambda p + q)' + (\lambda p + q)''' &= \lambda p' + q' + \lambda p''' + q''' \\
&= \lambda \underbrace{(p' + p''')}_{=0} + \underbrace{q' + q'''}_{=0} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Concluimos que $\lambda p + q \in W$, y por tanto W es s.e.v. de V.