MA1102-6 Álgebra Lineal
Profesor: Mauricio Telias H.
Auxiliar: Arturo Merino F.

Auxiliar 7 : Espacios Vectoriales e Independencia Lineal

24 de octubre del 2016

Recordemos:

Def: Llamamos $(V,+,\cdot)$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$ si para todo $u,v,w \in V$ y $\lambda,\mu \in \mathbb{F}$, se verifican las siguientes propiedades:

- $(V,+)$ es grupo abeliano y $\mathbb{F}$ un cuerpo.
- $\lambda u \in V$.
- $(\lambda+\mu)u = \lambda u + \mu u$.
- $\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$.
- $\lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u$.
- $1_{\mathbb{F}} u = u$.

Def: Sea un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Diremos que $U \neq \emptyset$, es un subespacio vectorial de V si y sólo si:

1. $\forall u,v \in U,\ u+v \in U$.
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in U,\ \lambda u \in U$.

Pro: Sean U,V subespacios vectoriales de E, luego $U \cap V$ es un subespacio vectorial de E.

Pro: E es subespacio vectorial de un espacio vectorial $V_{\mathbb{F}}$ si y sólo si:

$$\forall x,y \in E\ \ \forall \lambda \in \mathbb{F} \quad x+\lambda y \in E$$

Def: Sea $\{v_i\}_{i=1}^n \subseteq V$ un conjunto de vectores y $\{\lambda_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathbb{K}$ un conjunto de escalares. Llamaremos combinación lineal a la siguiente suma ponderada:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$$

Def: Sean $\{v_1,\dots,v_n\} \subseteq V$ con V espacio vectorial. Definimos el generado por A como:

$$\langle\{v_1,\dots,v_n\}\rangle = \left\{ v \in V : v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i,\ \lambda_i \in \mathbb{K} \right\}$$

Pro: $\langle\{v_1,\dots,v_n\}\rangle$ es un subespacio vectorial de V, además es el subespacio vectorial más pequeño que contiene a $\{v_1,\dots,v_n\}$.

Def: Diremos que un conjunto de vectores $X = \{x_1,\dots,x_n\}$ es linealmente independiente si:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0 \implies \lambda_i = 0 \ \ \forall i \in \{1,\dots,n\}$$

Donde λ_i son escalares.

Def: Diremos que un conjunto de vectores $X = \{x_1,\dots,x_n\}$ es linealmente dependientes si existen $\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\}$ escalares, no todos nulos tal que:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0$$

Teo: En $\mathbb{R}^n$, $m > n$ vectores son siempre linealmente dependientes.

P1. [Varios de Espacios Vectoriales]

a) Muestre que $(\mathcal{P}(X),\Delta,\cdot)$ sobre $\mathbb{Z}_2$ es un espacio vectorial. Donde X es un conjunto fijo y $\cdot$ esta definido de la siguiente manera:

$$\forall A \subseteq X : \quad 1\cdot A = A \quad \text{y} \quad 0 \cdot A = \emptyset$$

b) Sea E un espacio vectorial y $V,U \subseteq E$ subespacios vectoriales de E. Demuestre que $V \cup U$ es un subespacio de E si y sólo si $V \subseteq U$ o $U \subseteq V$.

c) Demuestre que $\mathbb{K}$ sobre $\mathbb{F}$ es un espacio vectorial. Donde $\mathbb{K}$ es un cuerpo y $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{K}$ un subcuerpo de $\mathbb{K}$.
Obs : De esto se deduce que $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$ son espacios vectoriales.

P2. [Varios de Independencia Lineal]
Justifique si los siguientes conjuntos son linealmente independientes o dependientes:

a) Las columnas de una matriz $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ invertible en el espacio $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$.

b) Tres puntos colineales en $\mathbb{R}^3$ en el espacio $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

c) $\left\{ \sum_{i=0}^{k} x^i \in \mathcal{P}_n : k \leq n \right\}$ en el espacio de los polinomios de grado a lo más n $(\mathcal{P}_n)$ con las operaciones usuales.

d) $\{\sin^2(x), 2x, e^x, x+1, \cos^2(x)\}$ en el espacio de las funciones a valores reales con las operaciones usuales.

P3. [P1 *b*1) **Control 1, Año 2014 + P3** *a*) **y** *b*) **Control 2, Año 2012]**

a) Sea V el conjunto de las matrices de 3×3 con coeficientes reales definido por:

$$V = \left\{ A \in \mathcal{M}_{33}(\mathbb{R}) : A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix},\ a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Demuestre que V es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_{33}(\mathbb{R})$.

b) Definimos:

$$W_a = \{A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}) : \mathrm{tr}(A) = a\} \qquad \mathrm{tr(A)} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Demuestre que W_a es un s.e.v. de $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ si y sólo si $a = 0$.

c) Sean $p, q \in \mathcal{P}_n$ tales que $\{p, q\}$ es linealmente independiente. Demuestre que $\{p, q, pq\}$ es linealmente independiente si y sólo si grado$(p) \geq 1$ y grado$(q) \geq 1$.

P4. [Encuentre un generador]
Encuentre un generador para los siguientes espacios vectoriales si $n = 3$ y en el caso general.

a) $U = \{A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}) : A \text{es simétrica}\}$

b) $V = \{p(x) \in \mathbb{R}_n[x] : p(-1) = 0\}$

c) $W = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, e_1 \rangle = \langle x, e_n \rangle\}$, donde e_i es un vector de sólo ceros salvo en la coordenada i.

P5. [P2 Control 2, Año 2014-β]

a) Considere en $\mathbb{R}^2$ las siguientes operaciones $\forall (x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$ y $\forall \lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x + x' - 2 \\ y + y' - 1 \end{pmatrix} \\ \lambda \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \lambda \begin{pmatrix} x - 2 \\ y - 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Demuestre que $\mathbb{R}^2$ dotado de las operaciones anteriores es un e.v. sobre $\mathbb{R}$.

b) Sea $V = \mathcal{P}_5(x)$ el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de los polinomios con grado menor o igual que 5 con coeficientes en $\mathbb{R}$. Demuestre que:

$$W = \{p \in \mathcal{P}_5 : p'(x) + p'''(x) = 0\}$$

es un subespacio vectorial de V.