MA1102-6 Álgebra Lineal
Profesor: Mauricio Telias H.
Auxiliar: Arturo Merino F.

Resumen Control 1

Def: Una matriz $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ la representaremos de la manera:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Donde cada $a_{ij} \in \mathbb{K}$. Diremos además que dos matrices son iguales, si lo son a coordenadas.

Def: Definimos las suma para matrices de igual dimensión por coordenadas, es decir si $C = A + B$ entonces:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Pro: $(\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K}), +)$ es un grupo abeliano.

Def: Si A es una matriz de $m \times n$ y B es una matriz de $n \times p$. Definimos $C = AB$ como:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Pro: $(\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ es un anillo con unidad.

Def: Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ definimos $A^k = AA^{k-1}$ con la convención $A^0 = I$.

Def: $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ se dirá triangular superior si $a_{ij} = 0$ cuando $i > j$. De manera análoga se dirá triangular inferior si $a_{ij} = 0$ cuando $i < j$. Por último si una matriz es triangular superior e inferior diremos que es diagonal.

Pro: El producto de matrices triangulares superiores, inferiores o diagonales es una matriz triangular, superior o diagonal respectivamente.

Def: Definimos la matriz traspuesta de A, llamada A^t por

$$(a^t)_{ij} = a_{ji}$$

Def: Si una matriz A verifica que $A = A^t$ diremos que A es simétrica.

Pro: Sean A, B matrices tal que AB tiene sentido. Entonces:

1. $(A^t)^t = A$.
2. $(AB)^t = B^t A^t$.
3. Si A es diagonal, entonces A es simétrica.

Def: Diremos que una matriz $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ es invertible si existe $B \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ tal que: $AB = I = BA$.

Pro: Sean $A, B \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$. Luego:

1. $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
3. Para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$.
4. $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

Def: Se definen las matrices de permutación $I_{pq} \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ como la matriz, que es la identidad con las filas p y q permutadas. Si $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$, entonces $I_{pq}A$ es la matriz A con las filas p y q permutadas.

Def: Se definen las matrices elementales $E_{pq}(\lambda) \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ como la matriz, que es la identidad salvo que en la posición q, p hay un λ. Si $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$, entonces $E_{pq}(\lambda)A$ es la matriz A salvo que la fila q tiene sumada a la fila p ponderada por $\lambda \in \mathbb{K}$.

Def: Diremos que una matriz A esta escalonada si:

1. Todas las filas no-nulas estan sobre las filas nulas.
2. El pivote (primer coeficiente no nulo) de una fila no -nula está siempre estrictamente a la derecha del pivote de la fila de más arriba.

Pro: Sea A una matriz. Podemos premultiplicar A por una colección de matrices elementales $E_1, \ldots, E_n$,

$$\tilde{A} = \left(\prod_{j=1}^{n} E_j \right) A$$

de manera que $\tilde{A}$ esté escalonada. Si este escalonamiento no tiene ceros en la diagonal, entonces A es invertible.

Pro: [**Algoritmo de Gauss**] Para resolver $Ax = b$ (con A invertible).

1. Escribir la matriz aumentada $(A|b)$.
2. Escalonar la matriz aumentada obteniendo $(\tilde{A}|\tilde{b})$.
3. Pasar la matriz aumentada a forma final, obteniendo $(A'|b')$.
4. b' es solución.

Pro: $I_{pq}^{-1} = I_{pq}$ y $E_{pq}(\lambda)^{-1} = E_{pq}(-\lambda)$.

Pro: Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$, entonces las proposiciones siguientes son equivalentes:

1. A es invertible.
2. $\forall b \in \mathbb{K}^n$, $Ax = b$ tiene solución única.

3. $\forall b \in \mathbb{K}^n$, $Ax = b$ tiene solución.
4. Sea $\tilde{A}$ un escalonamiento de A. Entonces $\tilde{A}$ no tiene ceros en la diagonal.

Pro: Una matriz triangular superior (o inferior) es invertible si y sólo si no tiene ceros en la diagonal.

Pro: [**Algoritmo de Gauss para invertibilidad**] Para encontrar A^{-1} (con A invertible).

1. Escribir la matriz aumentada $(A|I)$.
2. Escalonar la matriz aumentada obteniendo $(\tilde{A}|B)$.
3. Pasar la matriz aumentada a forma final, obteniendo $(I|B')$.
4. $A^{-1} = B'$

Def: Una recta es el conjunto:

$$L_{p,d} = \{x \in \mathbb{R}^n : x = p + \alpha d \;\; \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Def: Un plano es el conjunto:

$$\Pi_{p,d_1,d_2} = \{x \in \mathbb{R}^n : x = p + \alpha d_1 + \beta d_2 \;\; \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

Def: Llamamos ecuacion cartesiana que describe un objeto $n-dimensional$ en $\mathbb{R}^{n+1}$ a la ecuación:

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_{n+1} x_{n+1} = r$$

Def: Diremos que dos vectores x, y son paralelos si $\exists \lambda$ tal que $x = \lambda y$.

Def: Definimos el producto punto en $\mathbb{R}^n$ como sigue:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x^t y = y^t x$$

Pro: El producto punto tiene las siguientes propiedades:

- $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
- $\langle \lambda x + z, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \langle z, y \rangle$
- $\langle x, x \rangle \geq 0$
- $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$

Def: Diremos que dos vectores $a, b \neq 0$ son ortogonales si $\langle a, b \rangle = 0$.

Def: Definimos la norma de un vector en $\mathbb{R}^n$ por:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Pro: La norma tiene las siguientes propiedades:

- $\|x\| \geq 0$
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- $\|x\| = 0 \iff x = 0$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Def: Definimos el coseno del angulo entre dos vectores x, y por:

$$\cos(\theta) = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}$$

Teo: (de Cauchy-Shwarz)

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

Def: Definimos el determinante de una matriz 2×2 por:

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Def: Definimos el determinante de una matriz 3×3 por:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} &= a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ &= (aei + bfg + cdh) - (ceg + bdi + afh) \end{aligned}$$

Def: Definimos el producto cruz entre dos vectores $\in \mathbb{R}^3$ como:

$$x \times y = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

Pro: El producto cruz tiene las siguientes propiedades:

- $(x \times y) \perp y \wedge (x \times y) \perp x$
- $x \times y = -y \times x$
- $x \times (y + z) = x \times y + x \times z$
- $(\lambda x) \times y = \lambda (x \times y)$
- $x \parallel y \iff x \times y = 0.$
- $\|x \times y\| = \|x\| \|y\| \sin(\theta)$

Pro: El área de un paralelogramo creado por u y v es $\|u \times v\|$ además el volumen de un paralelepípedo creado por u, v y w es $|\langle u \times v, w \rangle|$.

Def: Un plano puede ser descrito por una ecuación del tipo $\langle x - p, n \rangle = 0$ donde p es un punto del plano y n un vector ortogonal a el. Esto se conoce como ecuación normal.

Def: Una proyección ortogonal es aquella que minimiza la distancia del punto a la recta o plano.

Pro: Consideremos el punto Q y los conjuntos :

$$L \doteq \{x \in \mathbb{R}^3 : x = P + tD \ \ t \in \mathbb{R}\}$$

$$\Pi \doteq \{x \in \mathbb{R}^3 : \langle x - P, N\rangle = 0\}$$

La proyección ortogonal de Q en L es:

$$Q'_L = P + \left\langle Q - P, \frac{D}{\|D\|} \right\rangle \frac{D}{\|D\|}$$

La proyección ortogonal de Q en Π es:

$$Q'_\Pi = Q + \left\langle P - Q, \frac{N}{\|N\|} \right\rangle \frac{N}{\|N\|}$$

Pro: Sea $P = (x_0, y_0, z_0)$ y $\Pi : Ax + By + Cz + D = 0$ un punto y un plano en $\mathbb{R}^3$ respectivamente. Luego:

$$d(P, \Pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$