Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1102 Álgebra Lineal

Guía Preparación Control #1

Profesores: Natacha Astromujoff y Mauricio Telias
Auxiliares: Arturo Merino y Nicolás Zalduendo

1. Álgebra de Matrices

P1. **(a)** Sea C una matriz de $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ que cumple que $C^t = -C$. Demuestre que $c_{ii} = 0\ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$.

(b) Sean $A, B \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ demuestre que AB es invertible $\Leftrightarrow$ A y B son invertibles.

P2. Sea $J \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ tal que $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ y $e \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ tal que $e = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$,

(a) Pruebe que $Je = ne$ y $J^2 = nJ$.

(b) Sea $\alpha \neq \frac{1}{n}$. Calcule β tal que $(I - \alpha J)^{-1} = I + \beta J$.

(c) Sea $\alpha = \frac{1}{n}$, verifique que $(I - \alpha J)e = 0$.

P3. Sean $A, B \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ tal que $AB = BA$. Pruebe que:

(a) $A^n B = B A^n,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

(b) $A^t B^t = B^t A^t$.

(c) Si A y B son invertibles, entonces $A^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

P4. Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ una matriz fija que verifica $A^3 = 0$. Considere el conjunto:

$$G = \{M(\lambda) \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}) : \lambda \in \mathbb{R}\}, \text{ con } M(\lambda) = I + \lambda A + \frac{\lambda^2}{2} A^2$$

(a) Muestre que $M(\lambda + \beta) = M(\lambda)M(\beta)$.

(b) Demuestre que $(G, \cdot)$ es un grupo abeliano, donde $\cdot$ es el producto usual de matrices. Determine de manera explícita $M(\lambda)^{-1}$.
Hint: Estudie quién es $M(0)$.

P5. **(a)** Se dice que una matriz cuadrada es idempotente si $A^2 = A$. Sean A y B dos matrices cuadradas idempotentes de la misma dimensión. Probar que $A + B$ es idempotente si y sólo si $AB = -BA$.

(b) Considere la matriz:

$$A(z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & z & z^2 & z^3 & \cdots & z^{n-1} \\ 1 & z^2 & z^4 & z^6 & \cdots & z^{2(n-1)} \\ 1 & z^3 & z^6 & z^9 & \cdots & z^{3(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & z^{n-1} & z^{2(n-1)} & z^{3(n-1)} & \cdots & z^{(n-1)^2} \end{pmatrix}$$

donde $z \in \mathbb{C}$. Demostrar que si z_0 es una raíz $n-$esima de la unidad distinta de 1 entonces $A(z_0)$ es invertible y se satisface la relación $A(z_0^{-1}) = nA^{-1}(z_0)$.

Hint : Puede ser útil el hecho que si $z \neq 1$ es una raíz $n-$esima de la unidad, entonces $\sum_{i=1}^{n-1} z^i = 0$.

2. Sistemas de Ecuaciones y Cálculo de Inversas

P6. Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & (3-\alpha)x_4 & = & \beta \\ x_1 & + & x_2 & & & + & (\beta+\alpha+3)x_4 & = & \alpha \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & \alpha+\beta \end{array}$$

(a) Escriba el sistema en forma matricial.

(b) Encuentre α y β de modo que el sistema tenga:

(i) Una solución.

(ii) Infinitas soluciones.

(iii) Ninguna solución.

(c) Para el caso (i) y (ii) encuentre explícitamente el conjunto solución.

P7. Sea el sistema:

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & (3-\alpha)x_4 & = & \alpha \\ x_1 & + & & + & x_3 & + & (\alpha+5)x_4 & = & \beta \\ x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 2\alpha+4 \end{array}$$

Encontrar valores de α y β tal que:

(a) No exista solucion.

(b) Existan infinitas soluciones y calcule el conjunto solución.

(c) Exista una única solución. Calcule dicha solución para el caso $\alpha = \beta = 1$.

P8. Considere $A \in \mathcal{M}_{44}(\mathbb{R})$ definida por:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Argumente por qué A es invertible y calcule A^{-1}.

P9. Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

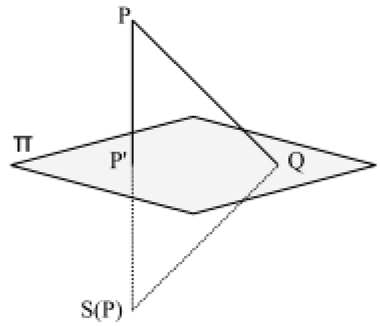
(a) Pruebe que P es invertible y calcule P^{-1}.

(b) Pruebe que $A = PDP^{-1}$.

(c) Utilizando lo anterior calcule A^{10}.

3. Geometría

P10. **(a)** Sea $P \in \mathbb{R}^3$ un punto y $\Pi \subseteq \mathbb{R}^3$ un plano ($P \notin \Pi$). Llamaremos $S(P)$ al punto simétrico de P con respecto al plano Π. ($\overline{PP'} \perp \Pi$ y $d(P,P') = d(P', S(P))$, ver figura).
Si $Q \in \Pi$ es un punto cualquiera sobre el plano, demuestre que $d(P,Q) = d(S(P),Q)$.



(b) Considere el plano $\Pi \subseteq \mathbb{R}^3$ y $A, B \in \mathbb{R}^3$ dos punto ubicados al mismo lado del plano Π. Muestre que el punto $\mathbb{R} \in \Pi$ tal que $d(A,R) + d(B,R)$ es mínima, se obtiene como la intersección del plano Π con la recta que une los puntos $S(A)$ con B.

P11. Sea $P = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ y Π_1 el plano que pasa por el origen y tiene por directores $D_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $D_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(a) Calcule la proyección ortogonal P_0 de P sobre el plano Π_1.

(b) Calcule la ecuación de la recta L que ese obtiene como la intersección de Π_1 con el plano Π_2 de ecuación $x + 2y = 2$.

(c) Calcule la proyección ortogonal de P_0 sobre la recta L.

(d) Calcule la distancia de P a la recta L.

P12. **(a)** Considere:

$$\Pi : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + S_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + S_2 \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}, \; L_1 : \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \; L_2 : \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ y } Q = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

(i) Calcule la ecuación del plano Π_1 que contiene a L_1 y L_2.
(ii) Encuentre la intersección entre Π y Π_1.
(iii) Calcule la distancia de Q al plano Π_1 y a L_1.
(iv) Encuentre la ecuación del plano Π_2 que es paralelo a Π y pasa por Q.
(v) Calcule la distancia entre Π y Π_2.

(b) Considere $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ con $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$. Encuentre el conjunto de todos los vectores ortogonales a $\vec{v} \neq 0$ especificando de qué tipo de conjunto se trata y, de ser posible, determine su ecuación vectorial y cartesiana.

P13. Sea $P = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y Π el plano de ecuación carteisana $x_1 - x_2 + x_3 = 1$

(a) Encuentre la ecuación vectorial y normal de Π.

(b) Encuentre la ecuación de la recta L que es perpendicular a Π y pasa por P. Pruebe que L pasa por el origen.