MA1102-6 Álgebra Lineal
Profesor: Mauricio Telias H.
Auxiliar: Arturo Merino F.

Auxiliar 6 : Preparación C1

17 de octubre del 2016

Recordemos:

Def: Definimos el determinante de una matriz 2×2 por:

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d\end{vmatrix} = ad - bc$$

Def: Definimos el determinante de una matriz 3×3 por:

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i\end{vmatrix} &= a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i\end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i\end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h\end{vmatrix} \\ &= (aei + bfg + cdh) - (ceg + bi + afh)\end{aligned}$$

Def: Definimos el producto cruz entre dos vectores $\in \mathbb{R}^3$ como:

$$x\times y = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3\end{vmatrix} = \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1\end{pmatrix}$$

Pro: El producto cruz tiene las siguientes propiedades:

- $(x\times y)\perp y \wedge (x\times y)\perp x$
- $x \parallel y \iff x\times y = 0.$

Def: Un plano puede ser descrito por una ecuación del tipo $\langle x - p, n\rangle = 0$ donde p es un punto del plano y n un vector ortogonal a el. Esto se conoce como ecuación normal.

Def: Una proyección ortogonal es aquella que minimiza la distancia del punto a la recta o plano.

Pro: Consideremos el punto Q y los conjuntos :

$$L \doteq \{x\in\mathbb{R}^3 : x = P + tD \;\; t\in\mathbb{R}\}$$

$$\Pi \doteq \{x\in\mathbb{R}^3 : \langle x - P, N\rangle = 0\}$$

La proyección ortogonal de Q en L es:

$$P + \left\langle Q - P, \frac{D}{\|D\|}\right\rangle \frac{D}{\|D\|}$$

La proyección ortogonal de Q en Π es:

$$Q + \left\langle P - Q, \frac{N}{\|N\|}\right\rangle \frac{N}{\|N\|}$$

P1. [Geometría / P1 Control 1, Año 2015]
Sea $\Pi\subseteq\mathbb{R}^3$ el plano de ecuación $x + y + z = 0$. Consideres los vectores $P\notin\Pi$, $Q\in\Pi$ y $D\in\Pi\setminus\{Q\}$:

$$P = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$

a) Verifique que la recta L que pasa por Q y tiene por director a D está contenida en el plano.

b) Determine R la proyección ortogonal de P sobre el plano Π.

c) Determine S la proyección de R sobre la recta L.

d) Muestre que el vector $P - S$ es ortogonal a D.

e) Si tomamos $a = 1$, $b = -1$ y $c = 0$. Calcule la ecuación cartesiana del plano que pasa por los puntos P, R y S.

P2. [Álgebra de Matrices / Nilpotencia]
Diremos que una matriz N es *nilpotente de grado* k si $\exists k \in \mathbb{N}$ tal que $N^k = 0$ y $N^{k-1} \neq 0$.

a) Sea $N \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ nilpotente de grado k y $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ una matriz tal que $NA = AN$, demuestre que entonces NA es nilpotente de grado a lo mas k.

b) Use lo anterior para mostrar que toda matriz nilpotente no es invertible.

c) Muestre que $(I + N)$ es invertible y que

$$(I+N)^{-1} = I - N + N^2 - \ldots + (-N)^{k-1} = \sum_{i=0}^{k-1} (-N)^i$$

d) Use lo anterior para encontrar la inversa de $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

P3. [Sistemas de Ecuaciones / P1 Control 1, Año 2013]

a) Considere el sistema lineal:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & b & 1 \\ a & 2b & 2a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ b \end{pmatrix}$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ son parámetros. Determinar los valores de a y b tales que el sistema: tenga solución única, tenga infinitas soluciones, no tenga solución.

b) 1) Sea:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcule escalonando, A^{-1}.

2) Sea B la matriz análoga a A, pero de tamaño $n \times n$, es decir:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{o bien } b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \geq j \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Justifique que:

i) B es invertible.

ii) La generalización natural del caso $n = 4$ dada por:

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ -1 & \text{si } i = j+1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

es la inversa de B.