MA1102-3 Álgebra Lineal
Profesor: Mauricio Telias H.
Auxiliar: Arturo Merino F.

Pauta 5 : Geometría Lineal, Producto Cruz y Proyecciones

12 de octubre del 2016

P1. [Varios]

a) Demuestre que dos planos Π_1, Π_2 son paralelos si y sólo si son de la forma:

$$\begin{aligned} \Pi_1 : &\quad Ax + By + Cz = R_1 \\ \Pi_2 : &\quad Ax + By + Cz = R_2 \end{aligned}$$

Con $R_1 \neq R_2$.

b) Considere las rectas en $\mathbb{R}^3$:

$$\text{Ł}_1 : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad s \in \mathbb{R} \qquad L_2 : \begin{cases} x - z - 1 = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

Encuentre la ecuación normal de $\Pi \subseteq \mathbb{R}^3$ plano tal que verifique $L_1 \subseteq \Pi$ y $L_2 \cap \Pi = \emptyset$. ¿Es Π único?

c) Sean:

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad L : \; P + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Encuentre la ecuación cartesiana del plano Π que pasa por P y ortogonal a la recta L.

Solución 1.

a)
- $(\implies)$
  Notemos que $\Pi_1 \cap \Pi_2 = \emptyset$ por tanto son paralelos.
- $(\impliedby)$
  Si dos planos son paralelos, entonces son de la forma:

  $$\Pi_1 \doteq \{x \in \mathbb{R}^3 : \langle x - P, N \rangle = 0\} \qquad \Pi_2 \doteq \{x \in \mathbb{R}^3 : \langle x - Q, N \rangle = 0\}$$

  Con $P \neq Q$. Expandiendo estas ecuaciones nos queda:

  $$\begin{aligned} \Pi_1 : &\quad N_1x + N_2y + N_3z = N_1P_1 + N_2P_2 + N_3P_3 \\ \Pi_2 : &\quad N_1x + N_2y + N_3z = N_1Q_1 + N_2Q_2 + N_3Q_3 \end{aligned}$$

  Luego tomando $A = N_1$, $B = N_2$, $C = N_3$, $R_1 = N_1P_1 + N_2P_2 + N_3P_3$ y $R_2 = N_1Q_1 + N_2Q_2 + N_3Q_3$ concluimos lo pedido. Notemos además que $R_1 \neq R_2$, pues sino son el mismo plano.

b) Como el plano es paralelo a L_2 debe tomar como vector director al director de L_2, además como contiene a L_1 sabemos que avanza en el director de L_1 a partir de $(0, 1, 0)$. Busquemos su ecuación normal, para esto basta con elegir un vector ortogonal a ambos directores (por ejemplo $N = D_1 \times D_2$):

$$\Pi : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \implies \langle x - P, D_1 \times D_2 \rangle = 0$$

Calculemos entonces $D_1 \times D_2$:

$$D_1 \times D_2 = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Además el plano es único pues todo plano que verifique lo anterior debe pasar por $(0,1,0)$ y tener los directores anteriores.

c) Basta con tomar un plano que tenga origen en P y tenga por vector normal $Q = (0,1,0)$. Luego:

$$\langle x - P, Q\rangle = x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 1 + x_3 \cdot 0 = x_2$$

Por tanto la ecuación buscada era:

$$x_2 = 0$$

P2. [Distancia entre planos]
Calcule la distancia entre dos planos paralelos.
Hint: Calcule primero la distancia de un plano a un punto y use la **P1.** *a*).

Solución 2. Sea Q un punto del espacio y $\Pi: \; Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = R$ un plano en su ecuación cartesiana. Definamos $N = (A, B, C) \neq \vec{0}$, tomemos $P \in \Pi$ notemos que

$$\langle P, N\rangle = Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 = R$$

Reescribamos la ecuación del plano como:

$$\begin{aligned} Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 &= R \\ \langle x, N\rangle &= \langle P, N\rangle \\ \langle x - P, N\rangle &= 0 \end{aligned}$$

Como el plano está ahora en su forma normal, podemos ocupar la fórmula de la proyección ortogonal,

$$Q' = Q + \left\langle P - Q, \frac{N}{\|N\|}\right\rangle \frac{N}{\|N\|}$$

Además estabamos buscando la distancia de Q al plano, notemos que esta va a ser la misma que la distancia de Q a su proyección ortogonal, luego:

$$d(Q, \Pi) = d(Q, Q') = \|Q' - Q\|$$

Calculemos esto último:

$$\begin{aligned} \|Q' - Q\| &= \left\| \left\langle P - Q, \frac{N}{\|N\|}\right\rangle \frac{N}{\|N\|} \right\| \\ &= \left| \left\langle P - Q, \frac{N}{\|N\|}\right\rangle \right| \frac{1}{\|N\|} \|N\| \\ &= \frac{1}{\|N\|} |\langle P - Q, N\rangle| \\ &= \frac{1}{\|N\|} |\underbrace{\langle P, N\rangle}_{R} - \langle Q, N\rangle| \\ &= \frac{|A_1 q_1 + A_2 q_2 + A_3 q_3 - R|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \end{aligned}$$

Sean entonces ahora dos planos paralelos:

$$\begin{aligned} \Pi_1: &\quad Ax + By + Cz = R_1 \\ \Pi_2: &\quad Ax + By + Cz = R_2 \end{aligned}$$

Sea además $Q = (q_1, q_2, q_3) \in \Pi_1$, luego:

$$d(Q, \Pi_2) = \frac{|\overbrace{A_1 q_1 + B_2 q_2 + C_3 q_3}^{R_1} - R_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|R_1 - R_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Notando que el último termino es constante (no depende de Q) concluimos que:

$$d(\Pi_1, \Pi_2) = \frac{|R_1 - R_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

P3. [P1 Control 2, Año 2013]

a) Sea $P \in \mathbb{R}^3$ un punto y $L \subseteq \mathbb{R}^3$ una recta de vector posición A y vector director d. Asuma que $P \notin L$. Determine el punto Q simétrico de P con respecto a L.

b) Considere las rectas $L : x = A + \lambda d$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y $L' : x = B + \mu d'$, $\mu \in \mathbb{R}$. Demuestre que el conjunto de puntos simétricos de cada punto de L' con respecto a L es una recta y determine su ecuación vectorial.

c) Para el caso particular de las rectas:

$$L = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad L' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

escriba la ecuación vectorial descrita en la parte *b*).

Solución 3.

a) Sea $S(P)$ el punto simétrico de P respecto a L y P' la proyección de P en L. Notemos (haciendo un dibujo que):

$$S(P) = P + 2(P' - P) = 2P' - P$$

Ocupando esto y la formula de la proyección ortogonal tenemos:

$$\begin{aligned} S(P) &= 2\left(A + \frac{\langle P - A, d\rangle}{\|d\|^2} d\right) - P \\ &= 2A - P + 2\frac{\langle P - A, d\rangle}{\|d\|^2} \end{aligned}$$

b) Notemos que si $Q \in L'$, entonces $Q = B + \mu d'$ para algún μ, por tanto:

$$\begin{aligned} S(Q) &= 2Q' - Q \\ &= 2A - Q + 2\frac{\langle Q - A, d\rangle}{\|d\|^2} \\ &= 2A - B - \mu d' + 2\frac{\langle B + \mu d' - A, d\rangle}{\|d\|^2} \\ &= 2A - B - \mu d' + 2\frac{\langle B - A, d\rangle}{\|d\|^2} + 2\mu\frac{\langle d', d\rangle}{\|d\|^2} \\ &= \underbrace{2A - B + 2\frac{\langle B - A, d\rangle}{\|d\|^2}}_{S} + \mu \underbrace{\left(2\frac{\langle d', d\rangle}{\|d\|^2} - d'\right)}_{D} \\ &= S + \mu D \end{aligned}$$

De donde es claro que el conjunto de los $S(Q)$ es una recta.

c) Reemplazando obtenemos la recta:

$$S(Q) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

P4. [Producto cruz]

a) Demuestre que:

$$L \doteq \{x \in \mathbb{R}^3 : (x - P) \times D = 0\}$$

es una recta.

b) Demuestre que si $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ son tales que:

$$\langle x, y\rangle = \langle x, z\rangle \qquad x \times y = x \times z \qquad x \neq 0$$

entonces $y = z$.
Obs: Esto se conoce como la ley de la cancelación conjunta.

c) Sea $a \in \mathbb{R}^3$ fijo. Demuestre que $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:

$$f(b) = a \times b$$

No es ni inyectiva ni sobreyectiva.

Solución 4.

a) En efecto:

$$\begin{aligned} L &= \{x \in \mathbb{R}^3 : (x - P) \times D = 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^3 : (x - P) \parallel D\} \\ &= \{(x - P) = \lambda D\} \\ &= \{x = P + \lambda D\} \end{aligned}$$

Lo último es claramente una recta.

b) Notemos que tenemos:

$$x \times (y - z) = 0 \implies x \parallel (y - z) \implies tx = (y - z)$$

Notemos que si $t = 0$ estamos listos, supongamos que $t \neq 0$. Además:

$$0 = \langle x, y - z\rangle = \langle x, tx\rangle = t\langle x, x\rangle \implies 0 = \langle x, x\rangle$$

De esto vemos que:

$$\|x\| = 0 \implies x = 0$$

Lo que no es posible, por tanto $t = 0$ y $y = z$.

c)
- **No es inyectiva:**
Notemos que si $a = 0$, entonces es claro que la función no es inyectiva. Supongamos $a \neq 0$, luego $a \neq 2a$, pero:

$$\begin{aligned} f(a) &= a \times a = 0 \\ f(2a) &= a \times (2a) = 0 \end{aligned}$$

- **No es sobreyectiva:**
Notemos que si $a = 0$, entonces es claro que no es sobreyectiva. Supongamos $a \neq 0$, sabemos entonces que $(a \times b) \perp a$ para todo b. Como $a \not\perp a$ no puede existir un b tal que $a \times b = a$ (sino $a \perp a$), por tanto f no es sobreyectiva.

P5. [P3 Control 1, Año 2008-β]

Sea $P = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ y Π_1 el plano que pasa por el origen y tiene por directores $D_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $D_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Calcule la proyección ortogonal P_0 de P sobre el plano Π_1.

b) Calcule la ecuación de la recta L que ese obtiene como la intersección de Π_1 con el plano Π_2 de ecuación $x + 2y = 2$.

c) Calcule la proyección ortogonal de P_0 sobre la recta L.

d) Calcule la distancia de P a la recta L.

Solución 5.

a) Encontremos la ecuación normal del plano:

$$N = D_1 \times D_2 = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Luego la ecuación del plano es $\langle x, N \rangle = 0$ y la proyección ortogonal de P_0 será:

$$\begin{aligned} P_0 &= P + \left\langle -P, \frac{N}{\|N\|} \right\rangle \frac{N}{\|N\|} \\ &= P - \frac{1}{\|N\|^2} \langle P, N \rangle N \\ &= \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{3}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b) Notemos que la ecuación cartesiana de Π_1 es $x + y - z = 0$. Entonces la recta buscada es:

$$L \doteq \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$$

Para encontrar la ecuación ocupemos a $y = t$ como variable libre:

$$\begin{aligned} x + t &= z \\ x + 2t &= 2 \end{aligned} \implies \begin{aligned} x &= 2 - 2t \\ y &= t \\ z &= 2 - t \end{aligned}$$

Luego la ecuación de L es:

$$L : \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad t \in \mathbb{R}$$

c) La proyección de P_0 sobre L será:

$$\begin{aligned}
P_0' &= \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} + \left\langle P_0 - \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}, \frac{D}{\|D\|} \right\rangle \frac{D}{\|D\|} \\
&= \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} + \frac{1}{6} \left\langle \begin{pmatrix}-4\\3\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} + \frac{12}{6} \begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

d) Notemos primero que la proyección de P en L es P_0' (hacer un dibujo), por tanto tenemos que:

$$d(P,L) = d(P,P_0') = \|P - P_0'\| = \left\| \begin{pmatrix}-3\\2\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix} \right\| = \sqrt{5}$$