MA1102-6 Álgebra Lineal
Profesor: Mauricio Telias H.
Auxiliar: Arturo Merino F.

Pauta 4 : Geometría Lineal

3 de octubre del 2016

P1. [Varios]

a) Considere el plano de ecuación:

$$x + y + z = 1$$

Encuentre su ecuación paramétrica.

b) Considere la recta:

$$L : \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

Encuentre su ecuación cartesiana.

Solución 1.

a) Tenemos que agregar dos variables libres para obtener la ecuación paramétrica. Tomando:

$$y = s \qquad z = t \qquad s, t \in \mathbb{R}$$

Tenemos que $x = 1 - s - t$. Luego escribiendo en forma parámetrica:

$$\Pi : \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \qquad s, t \in \mathbb{R}$$

Se puede hacer de otra forma: Notamos que $A = (1, 0, 0)^t$, $B = (0, 1, 0)^t$ y $C = (0, 0, 1)^t$ son tres puntos no colineales del plano y por tanto su ecuación esta dada por $\Pi : A + s(B - A) + t(C - A)$. Reemplazando tenemos:

$$\Pi : \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \qquad s, t \in \mathbb{R}$$

De donde vemos que da lo mismo cual método hubiesemos ocupado.

b) Notemos que como:

$$L : \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ y & = & \lambda \\ z & = & \lambda \end{array}$$

Recordemos que queremos llegar a la intersección de dos planos, es decir queremos eliminar a la variable extra λ. Notemos que la segunda y tercera ecuación se pueden condensar en $y = z$. Luego:

$$L : \begin{cases} x = 1 \\ y = z \end{cases}$$

Que sería su ecuación cartesiana.

P2. [Puntos, Rectas y Planos]
Considere el plano Π_1 y los puntos P, Q y R:

$$\Pi_1 : \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \quad s,t\in\mathbb{R} \qquad P=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \quad Q=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \quad R=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

a) Demuestre que P, Q y R no son colineales. Construya un plano Π_2 que contenga a estos tres puntos encontrando su ecuación paramétrica y cartesiana.

b) Describa el conjunto $L = \Pi_1 \cap \Pi_2$. ¿Qué forma tiene este conjunto?

c) Obtenga la ecuación paramétrica del plano Π_0 que pasa por p_1 y es ortogonal a L.

Solución 2.

a) Notemos que:

$$R = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} \notin \overline{PQ} = \left\{\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} : \lambda\in\mathbb{R}\right\}$$

Con lo que concluimos que P, Q y R no son colineales. Luego tenemos que la ecuación de Π_2 será:

$$\Pi_2 : P + s(Q-P) + t(R-P) = s\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} \quad s,t\in\mathbb{R}$$

Encontremos ahora la ecuación cartesiana:

$$\begin{array}{rcl} x &=& s-t \\ y &=& s+t \\ z &=& t \end{array} \implies \begin{array}{rcl} x &=& s-z \\ y &=& s+z \end{array} \implies x+z = y-z$$

De donde tenemos $\Pi_2 : x - y + 2z = 0$.

b) Busquemos primero la ecuación cartesiana de Π_1:

$$\begin{array}{rcl} x &=& 1-s \\ y &=& 2+2s+t \\ z &=& 4+s+t \end{array} \implies \begin{array}{rcl} y &=& 2+2(1-x)+t \\ z &=& 4+1-x+t \end{array} \implies y-2-2(1-x) = z-4-1+x$$

De donde tenemos $\Pi_1 : x + y - z = -1$. Por tanto la ecuacion de L es:

$$L = \Pi_1 \cap \Pi_2 = \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ x + y - z = -1 \end{cases}$$

Dejando $z = \lambda$ como variable libre, tenemos:

$$\begin{array}{rcl} x &=& \frac{-1-\lambda}{2} \\ y &=& \frac{-1+3\lambda}{2} \\ z &=& \lambda \end{array} \implies L : \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{3}{2}\\1\end{pmatrix} \quad \lambda\in\mathbb{R}$$

c) Notemos que basta con encontrar dos vectores (no paralelos) ortogonales a la dirección de L y luego usarlos como directores a partir de nuestro punto. Recordando la condición de ortogonalidad:

$$\left\langle \begin{pmatrix}d_1\\d_2\\d_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{3}{2}\\1\end{pmatrix} \right\rangle = 0 \implies -d_1 + 3d_2 + 2d_3 = 0$$

Por tanto basta tomar dos vectores no paralelos que verifiquen esto, por ejemplo $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Luego la ecuación paramétrica es:

$$\Pi_0 : \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad s, t \in \mathbb{R}$$

P3. [P3 Control 1, Año 2015-β]
Sean L_1 y L_2 los conjuntos solución de los sistemas:

$$L_1 \doteq \begin{cases} x+z=1 \\ \alpha x+y+z=0 \end{cases} \quad , \quad L_2 \doteq \begin{cases} 2\alpha x+y+z=1 \\ x+y+z+2=0 \end{cases} \quad , \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

a) Determine los valores de α para que L_1 y L_2 sean rectas.
b) Escriba sus ecuaciones vectoriales.
c) Determine la intersección entre ellas.

Solución 3.

a) Tratemos de escribir de inmediato las ecuaciones vectoriales de L_1 y L_2. Para la primera tomemos x como variable libre (es decir despejemos y y z en terminos de x):

$$\begin{array}{rcl} x &=& x \\ y &=& x(1-\alpha)-1 \\ z &=& 1-x \end{array} \implies \begin{array}{rcl} x &=& s \\ y &=& -1+s(1-\alpha) \\ z &=& 1-s \end{array}$$

Luego la ecuación vectorial de L_1 sería:

$$L_1 : \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1-\alpha \\ -1 \end{pmatrix}$$

Lo que es una recta para todo valor de α. Para L_2 tomaremos como variable libre y.

$$\begin{array}{rcl} x &=& \frac{3}{2\alpha-1} \\ y &=& y \\ z &=& \frac{(1-2\alpha)y-4\alpha-1}{2\alpha-1} \end{array} \implies \begin{array}{rcl} x &=& \frac{3}{2\alpha-1} \\ y &=& t \\ z &=& \frac{-4\alpha-1}{2\alpha-1}+t\frac{1-2\alpha}{2\alpha-1} \end{array}$$

Por lo tanto L_2 tiene la siguiente ecuación vectorial:

$$L_2 : \begin{pmatrix} \frac{3}{2\alpha-1} \\ 0 \\ \frac{-4\alpha-1}{2\alpha-1} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1-2\alpha}{2\alpha-1} \end{pmatrix}$$

Lo anterior solo tiene sentido si $\alpha \neq \frac{1}{2}$, notemos que si $\alpha = \frac{1}{2}$ entonces L_2 nos queda:

$$L_2 \doteq \begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+z+2=0 \end{cases}$$

Lo que es vacío y por tanto L_2 es recta si y sólo si $\alpha \neq \frac{1}{2}$.

b) Ya las encontramos en la parte *a*).

c) Tenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{rcl} x+z &=& 1 \\ \alpha x+y+z &=& 0 \\ 2\alpha x+y+z &=& 1 \\ x+y+z+2 &=& 0 \end{array}$$

Multiplicando la segunda ecuación por 2 y restandole la tercera llegamos al siguiente sistema:

$$\begin{array}{rcl} x+z &=& 1 \\ y+z &=& -1 \\ x+y+z+2 &=& 0 \end{array}$$

Este es un sistema lineal de 3×3 resolviendolo tenemos que $x = -1$, $y = -3$ y $z = 2$. Reemplazando ahora en las ecuaciones que contienen α tenemos:

$$\begin{array}{rcl} -\alpha - 1 & = & 0 \\ -2\alpha - 1 & = & 1 \end{array}$$

De donde vemos que la intersección solo ocurre si además $\alpha = -1$.

P4. [Norma y Producto Punto]

a) Demuestre el teorema de Pitágoras mediante geometría lineal.

b) Considere el vector $a = (1, 1, \ldots, 1)$ y el vector $b_n = (1, 2, \ldots, n)$, ambos en $\mathbb{R}^n$. Sea θ_n el ángulo entre a y b_n. Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} \theta_n$.

c) Sean $a, b \in \mathbb{R}^n$. Muestre que a y b son ortogonales si y sólo si $\|a + \lambda b\| \geq \|a\| \;\; \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Solución 4.

a) Notemos que todo triángulo rectángulo esta definido por sus dos catetos, llamémoslos x e y luego basta con probar:

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

En efecto:

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x+y\rangle + \langle y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x,y\rangle$$

Luego como x, y son ortogonales tenemos $\langle x, y\rangle = 0$ con lo que concluimos.
Obs: En clases probamos que $\|y - x\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$, esto es lo mismo pues basta notar que si x e y son ortogonales, entonces $\|y + x\| = \|y - x\|$.

b) Recordando la definición de angulo entre vectores:

$$\cos(\theta_n) = \frac{\langle a, b\rangle}{\|a\|\|b\|} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} i}{\sqrt{n \sum\limits_{j=1}^{n} j^2}} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{\sqrt{n\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{(n+1)}{\sqrt{2n^2+3n+1}}$$

Calculando ahora el limite pedido:

$$\lim_{n\to\infty} \theta_n = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)}{\sqrt{2n^2+3n+1}}\right) = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

c)
- ($\Longleftarrow$)

$$\begin{array}{rcl} \|a+\lambda b\| & \geq & \|a\| \\ \|a+\lambda b\|^2 & \geq & \|a\|^2 \\ \langle a+\lambda b, a+\lambda b\rangle & \geq & \|a\|^2 \\ \|a\|^2 + 2\lambda\langle a,b\rangle + \lambda^2\|b\|^2 & \geq & \|a\|^2 \\ 2\lambda\langle a,b\rangle + \lambda^2\|b\|^2 & \geq & 0 \end{array}$$

Como lo anterior vale para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ tomemos $\lambda = \frac{1}{n}$

$$\begin{array}{rcl} \frac{2}{n}\langle a,b\rangle + \frac{1}{n^2}\|b\|^2 & \geq & 0 \\ \langle a,b\rangle & \geq & -\frac{1}{2n}\|b\|^2 \end{array}$$

Además debe valer para $\lambda = -\frac{1}{n}$ con $n \in \mathbb{N}^+$.

$$\begin{array}{rcl} -\frac{2}{n}\langle a,b\rangle + \frac{1}{n^2}\|b\|^2 & \geq & 0 \\ \langle a,b\rangle & \leq & \frac{1}{2n}\|b\|^2 \end{array}$$

Juntando ambas desigualdades y haciendo tender el n a infinito tenemos:

$$0 \xleftarrow{n\to\infty} \frac{-\|b\|^2}{2n} \leq \langle a,b\rangle \leq \frac{\|b\|^2}{2n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

De donde concluimos $\langle a, b\rangle = 0$ por tanto a y b son ortogonales.

- ($\Longrightarrow$)
  Desarrollando tenemos:

  $$\|a+\lambda b\|^2 = \|a\|^2 + 2\lambda\langle a,b\rangle + \lambda^2\|b\|^2 = \|a\|^2 + \lambda^2\|b\|^2 \geq \|a\|^2$$

  Tomando raíz a ambos lados concluimos.

P5. [P2 Control 1, Año 2013]
Considere en $\mathbb{R}^3$ los puntos F, A, B, C y el plano Π:

$$F = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \Pi : x + y = -2$$

a) Si en el punto F se ubica un foco que ilumina los puntos A, B y C, se pide determiner las sombras A', B' y C' de tales puntos sobre el plano Π. Es decir, determinar la intersección de las rectas que pasan por los puntos $F - A$, $F - B$ y $F - C$ con el plano Π.

b) Encontrar la ecuación vectorial de la recta que pasa por A' y B'.

c) Determinar la recta de intersección del plano Π con el plano que contiene a los puntos A, B y C.

Solución 5.

a) Las rectas respectivamente estan dadas por:

$$L_1 : F + s(F - A) \qquad L_2 : F + s(F - B) \qquad L_3 : F + u(F - C)$$

Tenemos para A':

$$\begin{array}{rcl} x & = & 2 + \lambda \\ y & = & 2 + 2\lambda \\ z & = & 2 + 2\lambda \end{array} \implies \underbrace{(2 + \lambda)}_{x} + \underbrace{(2 + 2\lambda)}_{y} = -2 \implies \lambda = -2$$

Luego $A' = (0, -2, -2)$. Analogamente obtenemos B' y C'. Para B':

$$\begin{array}{rcl} x & = & 2 + 2\lambda \\ y & = & 2 + \lambda \\ z & = & 2 + 2\lambda \end{array} \implies \underbrace{(2 + 2\lambda)}_{x} + \underbrace{(2 + \lambda)}_{y} = -2 \implies \lambda = -2$$

Para C':

$$\begin{array}{rcl} x & = & 2 + 2\lambda \\ y & = & 2 + 2\lambda \\ z & = & 2 + \lambda \end{array} \implies \underbrace{(2 + 2\lambda)}_{x} + \underbrace{(2 + 2\lambda)}_{y} = -2 \implies \lambda = -\frac{3}{2}$$

Por lo tanto:

$$B' = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad C' = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

b) La recta $L : A' + t(B' - A')$ pasa por A' y B'.

c) Llamemos Π_1 al plano que contiene a A, B y C, luego $\Pi_1 : A + s(B - A) + t(C - A) :$

$$\Pi_1 : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Encontremos la ecuación paramétrica del plano:

$$\begin{array}{rcl} x & = & 1 - s - t \\ y & = & s \\ z & = & t \end{array} \implies x = 1 - y - z \implies x + y + z = 1$$

Luego el lugar geométrico buscado es:

$$L : \begin{cases} x + y = -2 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \implies \begin{array}{rcl} x & = & -2 - y \\ y & = & y \\ z & = & 3 \end{array}$$

Tomando y como variable libre tenemos:

$$L : \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De donde es claro que L es recta