MA1102-6 Álgebra Lineal
Profesor: Mauricio Telias H.
Auxiliar: Arturo Merino F.

Auxiliar 4 : Geometría Lineal

3 de octubre del 2016

Recordemos:

Def: Una recta es el conjunto:

$$L_{p,d} = \{x \in \mathbb{R}^n : x = p + \alpha d \;\; \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Def: Un plano es el conjunto:

$$\Pi_{p,d_1,d_2} = \{x \in \mathbb{R}^n : x = p + \alpha d_1 + \beta d_2 \;\; \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

Def: Llamamos ecuacion cartesiana que describe un objeto $n-dimensional$ en $\mathbb{R}^{n+1}$ a la ecuación:

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_{n+1} x_{n+1} = r$$

Def: Diremos que dos vectores x, y son paralelos si $\exists \lambda$ tal que $x = \lambda y$.

Def: Definimos el producto punto en $\mathbb{R}^n$ como sigue:

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x^t y = y^t x$$

Pro: El producto punto tiene las siguientes propiedades:

- $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$
- $\langle \lambda x + z, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle + \langle z, y\rangle$
- $\langle x, x\rangle \geq 0$
- $\langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0$

Def: Diremos que dos vectores $a, b \neq 0$ son ortogonales si $\langle a, b\rangle = 0$.

Def: Definimos la norma de un vector en $\mathbb{R}^n$ por:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Pro: La norma tiene las siguientes propiedades:

- $\|x\| \geq 0$
- $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$
- $\|x\| = 0 \iff x = 0$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Def: Definimos el coseno del angulo entre dos vectores x, y por:

$$\cos(\theta) = \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|}$$

P1. [Varios]

a) Considere el plano de ecuación:

$$x + y + z = 1$$

Encuentre su ecuación paramétrica.

b) Considere la recta:

$$L : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

Encuentre su ecuación cartesiana.

P2. [Puntos, Rectas y Planos]
Considere el plano Π_1 y los puntos P, Q y R:

$$\Pi_1 : \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \quad s,t\in\mathbb{R} \qquad P=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \qquad Q=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \qquad R=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

a) Demuestre que P, Q y R no son colineales. Construya un plano Π_2 que contenga a estos tres puntos encontrando su ecuación paramétrica y cartesiana.

b) Describa el conjunto $L = \Pi_1 \cap \Pi_2$. ¿Qué forma tiene este conjunto?

c) Obtenga la ecuación paramétrica del plano Π_0 que pasa por p_1 y es ortogonal a L.

P3. [P3 Control 1, Año 2015-β]
Sean L_1 y L_2 los conjuntos solución de los sistemas:

$$L_1 \doteq \begin{cases} x+z=1 \\ \alpha x+y+z=0 \end{cases} \quad , \quad L_2 \doteq \begin{cases} 2\alpha x+y+z=1 \\ x+y+z+2=0 \end{cases} \quad , \quad \alpha\in\mathbb{R}$$

a) Determine los valores de α para que L_1 y L_2 sean rectas.

b) Escriba sus ecuaciones vectoriales.

c) Determine la intersección entre ellas.

P4. [Norma y Producto Punto]

a) Demuestre el teorema de Pitágoras mediante geometría lineal.

b) Considere el vector $a = (1, 1, \ldots, 1)$ y el vector $b_n = (1, 2, \ldots, n)$, ambos en $\mathbb{R}^n$. Sea θ_n el ángulo entre a y b_n. Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} \theta_n$.

c) Sean $a, b \in \mathbb{R}^n$. Muestre que a y b son ortogonales si y sólo si $\|a + \lambda b\| \geq \|a\| \ \ \forall\lambda \in \mathbb{R}$.

P5. [P2 Control 1, Año 2013]
Considere en $\mathbb{R}^3$ los puntos F, A, B, C y el plano Π:

$$F=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} \qquad A=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \qquad \Pi : x+y=-2$$

a) Si en el punto F se ubica un foco que ilumina los puntos A, B y C, se pide determiner las sombras A', B' y C' de tales puntos sobre el plano Π. Es decir, determinar la intersección de las rectas que pasan por los puntos $F - A$, $F - B$ y $F - C$ con el plano Π.

b) Encontrar la ecuación vectorial de la recta que pasa por A' y B'.

c) Determinar la recta de intersección del plano Π con el plano que contiene a los puntos A, B y C.