MA1102-6 Álgebra Lineal
Profesor: Mauricio Telias H.
Auxiliar: Arturo Merino F.

Pauta 3 : Invertibilidad

2 de octubre del 2016

P1. [Análisis de Soluciones]

$$\begin{array}{ccccccccc} \beta x_1 & & & & & + & \alpha x_4 & = & \alpha \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & - & x_3 & & & = & 0 \\ \alpha x_1 & & & + & \beta x_3 & + & \alpha x_4 & = & \beta \end{array}$$

a) Determine para que valores de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ el sistema tiene solución única, no tiene solución o tiene infinitas soluciones.

b) Resuelva el sistema para los siguientes casos:

(i) $\alpha = 1, \beta = 1$.

(ii) $\alpha = 0, \beta = 1$.

(iii) $\alpha = 0, \beta = 0$.

Solución 1.

a) Escalondando el sistema auentado:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \beta & 0 & 0 & \alpha & \alpha \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & \beta & \alpha & \beta \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 \leftrightarrow f_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 0 & \beta & \alpha & \beta \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{f_3 = -\beta f_2 + f_3 \\ f_4 = -\alpha f_2 + f_4}]{f_2 = -f_1 + f_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \beta & \alpha & \alpha \\ 0 & \alpha & \alpha + \beta & \alpha & \beta \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[f_4 = -\frac{\alpha}{2} f_2 + f_4]{f_3 = -\frac{\beta}{2} f_2 + f_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & \alpha \\ 0 & 0 & \beta & \alpha & \beta \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_3 \leftrightarrow f_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & \alpha \end{array}\right)$$

Para analizar pongamonós en casos:

- Si $\alpha \neq 0$ y $\beta \neq 0$, entonces no hay 0's en la diagonal y por tanto hay solución única.
- Si $\alpha = 0$, entonces aparecen filas nulas y no hay ecuaciones contradictorias, por tanto hay infinitas soluciones.
- Si $\beta = 0$ y $\alpha \neq 0$ no hay solución pues las últimas dos filas quedan como:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & \alpha \end{array}\right) \xrightarrow{f_4 = -f_3 + f_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \end{array}\right)$$

De esto vemos que hay una ecuación contradictoria. Por tanto no hay soluciones.

b) (i) Reemplazando $\alpha = 1$ y $\beta = 1$ tenemos que:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

De esto:

$$\begin{array}{rcl} x_1 - x_2 - x_3 & = & 0 \\ 2x_2 + 2x_3 & = & 0 \\ x_3 + x_4 & = & 1 \\ x_4 & = & 1 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{rcl} x_1 & = & 0 \\ x_2 & = & 0 \\ x_3 & = & 0 \\ x_4 & = & 1 \end{array}$$

(ii) Reemplazando $\alpha = 0$ y $\beta = 1$ tenemos que:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

De esto nos queda que:

$$\begin{array}{rcl} x_1 - x_2 - x_3 & = & 0 \\ 2x_2 + 2x_3 & = & 0 \\ x_3 & = & 1 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{rcl} x_1 & = & 0 \\ x_2 & = & -1 \\ x_3 & = & 1 \end{array}$$

Notemos que no tenemos restricciones sobre x_4, por tanto es variable libre, es decir, $x_4 = s$. Luego el conjunto solución son los vectores de la forma:

$$(0, -1, 1, s)^t \qquad s \in \mathbb{R}$$

(iii) Reemplazando $\alpha = 0$ y $\beta = 0$ tenemos que:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Luego:

$$\begin{array}{rcl} x_1 - x_2 - x_3 & = & 0 \\ 2x_2 + 2x_3 & = & 0 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{rcl} x_1 & = & 0 \\ x_2 & = & -x_3 \end{array}$$

De donde tomaremos x_3 y x_4 como variable libre (Podriamos haber elegido x_4 y cualquier otra), esto es $x_4 = s$ y $x_3 = r$. Luego las soluciones son de la forma

$$(0, -r, r, s)^t \qquad s, r \in \mathbb{R}$$

P2. [Varios]

a) Invierta; de ser posible, las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

b) Considere la matriz $B \in \mathcal{M}_{33}(\mathbb{R})$, con

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$$

Demuestre que si B es invertible, entonces $(a \neq b) \wedge (b \neq c) \wedge (c \neq a)$.

c) Demuestre que si la suma de los elementos en cada fila de una matriz invertible es k, entonces la suma de los elementos en cada fila de la inversa es $\frac{1}{k}$.

Solución 2.

a) Para la primera matriz tenemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Escal.}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Forma Final}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -\frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -\frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Para la segunda queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Escal.}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Forma Final}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{7} & \frac{17}{28} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{7} & -\frac{5}{14} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{14} & 0 \end{array}\right)$$

La ultima no es invertible, en efecto:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Escal.}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -\frac{9}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

b) Escalonando la matriz aumentada queda:

$$(A|0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ a & b & c & 0 \\ a^2 & b^2 & c^2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Escal.}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & (b-a) & (c-a) & 0 \\ 0 & 0 & (c-b)(c-a) & 0 \end{array}\right)$$

Luego como sabemos que la matriz escalonada no tiene ceros en la diagonal concluimos lo pedido.

c) Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ la matriz con la propiedad mencionada, y $B \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ su inversa. Entonces tenemos que para la fila m-esíma:

$$1 = \sum_{i=1}^{n} (ba)_{mi} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{mj} a_{ji} = \sum_{j=1}^{n} b_{mj} \sum_{i=1}^{n} a_{ji} = \sum_{j=1}^{n} b_{mj} k = k \sum_{j=1}^{n} b_{mj}$$

De donde concluimos que $\sum_{j=1}^{n} b_{mj} = \frac{1}{k}$ para cualquier m.

P3. [P3 Control 4, Año 2006]

a) Considere las matrices cuadradas $A, B \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$. Demuestre que:

1) A es invertible si y sólo si AA^t es invertible.
2) Si $A^2 = A$ y $B = I - A$ entonces $B^3 = B$. Si A es invertible, utilice las condiciones dadas, para calcular las matrices A y B.

b) Considere los vectores $u, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Se define la matriz $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ por $A = uv^t$.

1) Pruebe que para todo $x \in \mathbb{R}^n$:
$$Ax = 0 \iff v^t x = 0$$
Hint: Observe que $v^t x \in \mathbb{R}$.
2) Encuentre el número de variables libres en la resolución del sistema $Ax = 0$. ¿Es A invertible?

Solución 3.

a) 1) Demostraremos cada implicancia por separado.

- ($\Longrightarrow$)
Si A es invertible, entonces existe $B \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ tal que $AB = I = BA$, luego:
$$(AA^t)(B^tB) = A(A^tB^t)B = A\underbrace{(BA)^t}_{=I}B = AB = I$$
Es decir AA^t es invertible.
- ($\Longleftarrow$)
Si AA^t es invertible, entonces existe B tal que $AA^tB = I$, luego:
$$A\underbrace{A^tB}_{=C} = AC = I$$
Es decir A es invertible.

2) Calculemos B^3:
$$B^3 = (I-A)^3 = (I-A)(I-2A+\underbrace{A^2}_{=A}) = (I-A)^2 = (I-2A+\underbrace{A^2}_{=A}) = (I-A) = B$$
Notemos además que si A es invertible, entonces:
$$A^2 = A \implies A^2A^{-1} = AA^{-1} \implies A = I$$
Tenemos además que $B = 0$.

b) 1)
$$Ax = 0 \iff (uv^t)x = 0 \iff u\underbrace{(v^tx)}_{\in\mathbb{R}} = 0 \iff v^tx = 0$$

2) Por lo anterior, basta con resolver $v^tx = 0$. Pero eso es un sistema de n incógnitas y una ecuación, por tanto hay $n-1$ variables libres. Si $n > 1$ la matriz no es invertible pues el sistema anterior tiene infinitas soluciones, mientras que si $n = 1$ hay solución única y es invertible.

P4. [P1 Control 1, Año 2014-β]

Decimos que $U \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ es unitaria si $UU^t = I$.

a) Demuestre que si U es unitaria, entonces U es invertible. Demuestre que si U_1 y U_2 son unitarias, entonces su producto U_1U_2, también es unitario.

b) Para $\theta \in \mathbb{R}$ considere la matriz:

$$G(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Demuestre que, cualquiera sea $\theta \in \mathbb{R}$, $G(\theta)$ es unitaria y demuestre que $G(\theta)^{-1} = G(-\theta)$.

c) Calcule además $G(\theta)^2$ y luego deduzca una formula para $G(\theta)^n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ (es decir, incluyendo potencias de inversas.)

Solución 4.

a) Notemos que como $UU^t = I$ es claro que U es invertible con inversa U^t. Veamos que el producto de matrices unitarias es unitario:

$$(U_1U_2)(U_1U_2)^t = U_1 \underbrace{U_2U_2^t}_{=I} U_1^t = \underbrace{U_1U_1^t}_{=I} = I$$

Es decir U_1U_2 es unitaria.

b) Veamos que $G(\theta)$ es unitaria:

$$\begin{aligned} G(\theta)G(\theta)^t &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) & \cos(\theta)\sin(\theta) - \sin(\theta)\cos(\theta) \\ \sin(\theta)\cos(\theta) - \cos(\theta)\sin(\theta) & \sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Notemos que como $G(\theta)$ es unitaria, entonces $G(\theta)^{-1} = G(\theta)^t$ ocupando además las propiedades de paridad del seno y coseno tenemos:

$$\begin{aligned} G(\theta)^{-1} &= G(\theta)^t \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} \\ &= G(-\theta) \end{aligned}$$

c) Calculemos $G(\theta)^2$:

$$\begin{aligned} G(\theta)^2 &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) & -2\sin(\theta)\cos(\theta) \\ 2\sin(\theta)\cos(\theta) & \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix} \\ &= G(2\theta) \end{aligned}$$

Conjeturamos entonces que $G(\theta)^n = G(n\theta)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, demostrémoslo por inducción:

- **Caso Base:** $(n = 0)$
  Es claro que $G(\theta)^0 = G(0 \cdot \theta)$.
- **Hipótesis Inductiva:**
  $G(\theta)^n = G(n\theta)$.
- **Paso Inductivo:**
  Probémoslo para el caso $n + 1$:

$$
\begin{aligned}
G(\theta)^{n+1} &= G(\theta)^n G(\theta) \\
&= G(n\theta)G(\theta) \\
&= \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(n\theta)\cos(\theta) - \sin(n\theta)\sin(\theta) & -\sin(\theta)\cos(n\theta) - \sin(n\theta)\cos(\theta) \\ \sin(n\theta)\cos(\theta) + \sin(\theta)\cos(n\theta) & \cos(n\theta)\cos(\theta) - \sin(n\theta)\sin(\theta) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos([n+1]\theta) & -\sin([n+1]\theta) \\ \sin([n+1]\theta) & \cos([n+1]\theta) \end{pmatrix} \\
&= G([n+1]\theta)
\end{aligned}
$$

Concluimos entonces que $G(\theta)^n = G(n\theta)$. Notemos que nos falta probar este hecho para potencias negativas, en efecto si $z = -n$ con $n \in \mathbb{N}$ tenemos:

$$G(\theta)^z = G(\theta)^{-n} = (G(\theta)^{-1})^n = G(-\theta)^n = G(-n\theta) = G(z\theta)$$

Concluimos entonces que la igualdad anterior es valida para todo $n \in \mathbb{Z}$.

P5. [Existencia, unicidad y propiedades de la factorización LDU]
Suponga $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$ tal que al escalonarla (sin permutar filas), no encontramos pivotes nulos. Se obtiene tras este escalonamiento una matriz triangular superior sin ceros en la diagonal que llamaremos $\tilde{A}$.

a) Demuestre que existe una matriz E tal que $EA = \tilde{A}$, invertible y cuya inversa es triangular inferior con unos en la diagonal. Concluya que $A = L'U'$ donde L' es una matriz triangular inferior con unos en la diagonal y U' una matriz triangular superior que contiene los pivotes en la diagonal.
Hint : Examine las matrices elementales ocupadas al escalonar A.

b) Demuestre que $A = LDU$, donde L es una matriz triangula inferior con unos en la diagonal, D es una diagonal formada por los pivotes, y U es una triangular superior con unos en la diagonal. Esto se conoce como *factorización LDU*.

c) Demuestre que si $B \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ admite una factorización LDU, entonces esta es única.

d) Sea $C \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ con factorización LDU y LDU dicha factorización, demuestre que C es simétrica si y solo si $L = U^t$.

Solución 5.

a) Recordemos primero algunos resultados (3 y 4 son requieren cosas intermedias y por tanto omitiremos la demostración):

Lema 1. *El producto de triangulares inferiores es triangular inferior.*

Demostración. Basta con mostrar que el producto de 2 triangulares inferiores (el resultado general se obtiene por inducción). Sean $A, B \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ triangulares inferiores, queremos mostrar que $(ab)_{ij} = 0$ cuando $i < j$. Sea entonces $i < j$

$$\begin{aligned}(ab)_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{i} a_{ik}\underbrace{b_{kj}}_{=0} + \sum_{k=i+1}^{n} \underbrace{a_{ik}}_{=0} b_{kj} \\ &= 0\end{aligned}$$

□

Lema 2. *Una matriz triangular inferior A que ademas no tiene $0's$ en la diagonal principal es invertible.*

Demostración. Notemos que A^t es triangular superior, por tanto es una matriz escalonada sin 0's en la diagonal, es decir A^t invertible. Luego como A invertible $\Leftrightarrow A^t$ invertible concluimos. □

Lema 3. *La inversa de una triangular inferior es triangular inferior.*

Lema 4. *Si una matriz T es triangular inferior invertible, entonces $(t^{-1})_{ii} = \frac{1}{t_{ii}}$*

Lema 5. *El producto de matrices triangulares inferiores que tienen sólo unos en la diagonal, sólo tiene unos en la diagonal.*

Demostración. Sean $A, B \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ triangulares inferiores tal que $a_{ii} = 1$ y $b_{ii} = 1$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\begin{aligned}(ab)_{ii} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}\underbrace{b_{ki}}_{=0}\right) + \underbrace{a_{ii}b_{ii}}_{=1} + \left(\sum_{k=i+1}^{n} \underbrace{a_{ik}}_{=0} b_{ki}\right) \\ &= 1\end{aligned}$$

□

Al empezar el proceso de escalonamiento, al lado derecho hay una identidad, que es triangular inferior con 1's en la diagonal. En cada paso del escalonamiento multiplicamos por una matriz elemental triangular inferior (si es que no permutamos filas), además notemos que los 1's en la diagonal se mantienen tras estas operaciones (pues son producto de triangulares inferiores con 1's en la diagonal). Luego el lado derecho continua siendo triangular inferior (pues es producto de triangulares inferiores). Notemos que esta matriz al lado derecho es justamente la multiplicación de todas nuestras operaciones elementales, llamemosla

$$E = \prod_{i=1}^{k} E_i$$

Esta matriz es justamente la buscada. Verifica $EA = \tilde{A}$, es invertible pues no contiene ceros en la diagonal, luego su inversa es triangular inferior que ademas contiene unos en la diagonal por la propiedad vista en *lema 4*.
Para concluir notemos que $A = E^{-1}\tilde{A}$. Luego tomando $L' = E^{-1}$ y $U' = \tilde{A}$ obtenemos lo buscado.

b) Por la parte *a*) basta con tomar una matriz D' que contenga los elementos diagonales de U'. Luego $A = L'D'D'^{-1}U'$ y tomando $L = L'$, $D = D'$ y $U = D'^{-1}U'$ concluimos lo pedido.

c) Supongamos $B = L_1D_1U_1 = L_2D_2U_2$ dos factorizaciones LDU. Tenemos entonces:

$$L_2^{-1}L_1D_1 = D_2U_2U_2^{-1}$$

De esto tenemos que $L_2^{-1}L_1D_1$ es una triangular inferior con diagonal igual a D_1 y análogamente $D_2U_2U_2^{-1}$ es triangular superior con diagonal igual a D_2, como son iguales concluimos primero que $D_1 = D_2$, además como $L_2^{-1}L_1D_1$ es triangular inferior y superior concluimos que es diagonal, es decir

$$L_2^{-1}L_1D_1 = D_1 \implies L_2^{-1}L_1 = I$$

Por tanto $L_1 = L_2$. Un argumento similar concluye que $U_1 = U_2$.

d)
- ($\Longleftarrow$)

$$C^t = (L(DU))^t = (DU)^tL^t = U^tD^tL^t = LDU = C$$

- ($\Longrightarrow$)
  Notemos que si C es simétrica, entonces $C = C^t = (LDU)^t = U^tD^tL^t$, luego LDU y $U^tD^tL^t$ son dos factorizaciones LDU, y por tanto deben se iguales. Es decir $L = U^t$.