MA1102-6 Álgebra Lineal
Profesor: Mauricio Telias H.
Auxiliar: Arturo Merino F.

Matrices Invertibles y Equivalencias

29 de septiembre del 2016

Consideremos una matriz $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$. Tenemos entonces que las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. A es invertible.
2. A^T es invertible.
3. Algun producto de A con A^T es invertible (e.g. AA^TA^TAA es invertible $\Leftrightarrow$ A es invertible).
4. Cualquier producto de A con A^T es invertible.
5. A^n es invertible $\forall n \in \mathbb{N}^+$.
6. $\exists n \in \mathbb{N}^+$ tal que A^n es invertible.
7. $Ax = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
8. $\forall b \in \mathbb{R}^n$, el sistema $Ax = b$ tiene al menos una solución.
9. Sea $b \in \mathbb{R}^n$ cualquiera, entonces $Ax = b$ tiene una única solución.
10. A es fila-equivalente a la identidad.
11. A es columna-equivalente a la identidad.
12. A se puede escribir como un producto de matrices elementales.
13. A es invertible por la izquierda (i.e. $\exists B \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}) : BA = I$).
14. A es invertible por la derecha (i.e. $\exists B \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}) : AB = I$).
15. La función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por $f(x) = Ax$ es inyectiva.
16. La función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por $f(x) = Ax$ es sobreyectiva.
17. La función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por $f(x) = Ax$ es biyectiva.
18. Sea $\tilde{A}$ un escalonamiento de A. $\tilde{A}$ no posee ceros en la diagonal.

Ejercicio. ¡Demostrar varias de estas equivalencias! Varias están hechas a modo de ejemplo en la auxiliar 2.

Ejemplo 1. *Estas equivalencias son bastante útiles y acortan bastante algunas demostraciones. Por ejemlo uno podría querer demostrar lo siguiente: Si A es una matriz tal que $A^k = 0$ y $A^{k-1} = 0$ para algún k, entonces A no es invertible (esas matrices se llaman nilpotentes de grado k.), aprovechándonos de las equivalencias supongamos A nilpotente de grado k invertible, usando 5 sabemos que $A^k = 0$ es invertible, contradiciendo la no-invertibilidad de 0.*

La lista anterior no es exhaustiva, existen otras proposiciones igual de fuertes que la invertibilidad, pero algunas requieren nuevos conceptos. Buscando ampliar nuestra lista de cosas que son equivalentes a ser invertible, introducimos el siguiente concepto:

Definición (Independencia Lineal)**.** Un conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ de vectores en $\mathbb{R}^n$ los diremos linealmente independientes si:

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = 0 \implies \lambda_i = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}$$

Otra forma de ver la independencia lineal es que no podemos escribir un vector como una suma ponderada (es decir del tipo $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_k v_k$) de los otros vectores. Esto es más natural, pues si construimos una matriz con estos vectores entonces no podemos reducir alguna fila a solo 0's haciendo solamente operaciones elementales.

Ejemplo 2. *Los siguientes conjuntos son linealmente independientes:*

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\} \qquad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Ejemplo 3. *Los siguientes conjuntos NO son linealmente independientes.*

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \qquad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

El primero no es linealmente independiente pues $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$ *y el segundo pues* $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Las siguientes proposiciones son equivalentes para una matriz cuadrada:

1. A es invertible.
2. Los vectores fila de A son linealmente independientes.
3. Los vectores columna de A son linealmente independientes.

Ejemplo 4. *Ocupando nuestros ejemplos anteriores sabemos que las matrices:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Son invertibles, mientras que las matrices:

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

no lo son.

Ejercicio. Usando el concepto de independencia lineal demuestre lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ es invertible} \iff ad \neq bc$$