MA1102-6 Álgebra Lineal
Profesor: Mauricio Telias H.
Auxiliar: Arturo Merino F.

Pauta 2 : Sistemas Lineales

21 de septiembre del 2016

P1. **[Varios]**
Considere los sistemas de ecuaciones:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & z & = & 8 \\ -3x & - & y & + & 2z & = & -11 \\ -2x & + & y & + & 2z & = & -3 \end{array} \qquad \begin{array}{rcrcrcr} 2\sin\alpha & - & \cos\beta & + & 3\tan\gamma & = & 3 \\ 4\sin\alpha & + & 2\cos\beta & - & 2\tan\gamma & = & 10 \\ 6\sin\alpha & - & 3\cos\beta & + & \tan\gamma & = & 9 \end{array}$$

Escriba cada uno de forma matricial ($Ax = b$), luego (de ser posible), resuelva el sistema escalonando la matriz aumentada $(A|b)$.

Solución 1.

a) Escribiendo la forma matricial y la matriz aumentada queda :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -11 \\ -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(A|b)} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ -3 & -1 & 2 & -11 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right)$$

Escalonando la matriz aumentada tenemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ -3 & -1 & 2 & -11 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3 = f_1 + f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ -3 & -1 & 2 & -11 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_2 = \frac{3}{2} f_1 + f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_3 = -4 f_2 + f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[f_3 = -f_3]{\substack{f_1 = \frac{1}{2} f_1 \\ f_2 = 2 f_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

De este último sistema tenemos:

$$\begin{array}{rcl} z & = & -1 \\ y + z & = & 2 \\ x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z & = & 4 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{rcl} z & = & -1 \\ y & = & 3 \\ x & = & 2 \end{array}$$

Obs: Notemos que con la notación de filas anterior podemos recuperar fácilmente las matrices elementales usadas, en este caso serían $E_{13}(1)$, $E_{12}(\frac{3}{2})$, $E_{23}(-4)$, $E_{11}(\frac{1}{2})$, $E_{22}(2)$, $E_{33}(-1)$.

b) De manera análoga:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -2 \\ 6 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ \cos\beta \\ \tan\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{(A|b)} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & -2 & 10 \\ 6 & -3 & 1 & 9 \end{array}\right)$$

Si bien este sistema no es lineal, haciendo un cambio de variables se puede *linealizar* ($x = \sin\alpha, y = \cos\beta, z = \tan\gamma$). Trabajando la matriz aumentada nos queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & -2 & 10 \\ 6 & -3 & 1 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3=-3f_1+f_3]{f_2=-2f_1+f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & -8 & 4 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[f_3=-\frac{1}{8}f_3]{\substack{f_1=\frac{1}{2}f_1 \\ f_2=\frac{1}{4}f_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Entonces:

$$\begin{array}{rcl} \tan\gamma & = & 0 \\ \cos\beta - 2\tan\gamma & = & 1 \\ \sin\alpha - \frac{1}{2}\cos\beta + \frac{3}{2}\tan\gamma & = & \frac{3}{2} \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{rcl} \tan\gamma & = & 0 \\ \cos\beta & = & 1 \\ \sin\alpha & = & 2 \end{array}$$

De esto concluimos que el sistema no tiene solución, pues no es posible que $\sin\alpha = 2$.

P2. [Fila-equivalencia]
Se define la relación $\sim$ en $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ por:

$$A \sim B \Longleftrightarrow \text{Existen matrices elementales } E_1, E_2, ..., E_n \text{ tales que } \left(\prod_{i=1}^{n} E_i\right) A = B$$

Muestre que $\sim$ es una relación de equivalencia.

Solución 2. Verifiquemos que $\sim$ es reflexiva, simétrica y transitiva:

- **Reflexividad:**
  Es reflexiva pues, sea E una matriz elemental luego E^{-1} también es elemental, además:
  $$EE^{-1}A = A$$
  por tanto $A \sim A$.
- **Simetría:**
  Es simétrica pues si $A \sim B$, tenemos que
  $$\left(\prod_{i=1}^{n} E_i\right) A = B$$
  Entonces tomando inversas tenemos que
  $$\left(\prod_{i=0}^{n-1} (E_{n-i})^{-1}\right) B = A$$
  , es decir $B \sim A$.
- **Transitividad:**
  Es transitiva pues si $A \sim B$ y $B \sim C$, es lo mismo que
  $$\left(\prod_{i=1}^{n} E_i\right) A = B \text{ y } \left(\prod_{i=1}^{m} F_i\right) B = C$$
  Luego
  $$\left(\prod_{i=1}^{m} F_i\right)\left(\prod_{i=1}^{n} E_i\right) A = \left(\prod_{i=1}^{m} F_i\right) B = C$$
  Por tanto $A \sim C$.

P3. [P1 Control 1, Año 2014]

Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y considere el siguiente sistema lineal

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & +3x_2 & +4x_3 & = & \beta \\ 3x_1 & +4x_2 & +\alpha x_3 & = & 1 \end{array}$$

a) Determine los valores de α y β para los cuales el sistema tiene solución única, no tiene solución, tiene infinitas soluciones y en este último caso determine dichas soluciones.

b) Para $\alpha = 4$ resuelva el sistema.

Solución 3.

a) Escalonemos el sistema aumentado:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & \beta \\ 3 & 4 & \alpha & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3=-3f_1+f_3]{f_2=-2f_1+f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & \beta-2 \\ 0 & -2 & \alpha-9 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_3=-2f_2+f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & \beta-2 \\ 0 & 0 & \alpha-5 & 2-2\beta \end{array}\right)$$

- Si $\alpha \neq 5$ hay solución única pues no hay ceros en la diagonal principal.
- Si $\alpha = 5$ y $\beta \neq 1$ no hay solución, pues la fila 3 queda contradictoria.
- En los otros casos ($\alpha = 5$ y $\beta = 1$) hay infinitas soluciones.

En el caso de las infinitas soluciones tenemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Las ecuaciones correspondientes son:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & 1 \\ x_2 + 2x_3 & = & 1 \end{array} \implies \begin{array}{rcl} x_1 & = & -1 + x_3 \\ x_2 & = & 1 - 2x_3 \end{array}$$

b) Reemplazado $\alpha = 4$ tenemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & \beta-2 \\ 0 & 0 & -1 & 2-2\beta \end{array}\right) \xrightarrow[f_3=-f_3]{f_2=-f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2-\beta \\ 0 & 0 & 1 & 2\beta-2 \end{array}\right)$$

Tenemos entonces las siguientes ecuaciones:

$$\begin{array}{rcl} x_3 & = & 2\beta - 2 \\ x_2 + 2x_3 & = & 2 - \beta \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & 1 \end{array} \implies \begin{array}{rcl} x_3 & = & 2\beta - 2 \\ x_2 & = & 6 - 5\beta \\ x_1 & = & 4\beta - 5 \end{array}$$

P4. [Caracterizaciones de la Invertibilidad]
Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ y $x, b \in \mathbb{R}^n$. Demuestre que las siguientes proposiciones son equivalentes.

a) A es fila-equivalente a la identidad.
b) A puede ser escrito como un producto de matrices elementales.
c) A es invertible.
d) La función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por $f(x) = Ax$ es inyectiva.
e) $Ax = 0 \iff x = 0$.
f) Para un b fijo, el sistema de ecuaciones $Ax = b$, tiene una única solución x.

Solución 4. Ocuparemos la letra E para denotar matrices elementales, es decir $\{E_1, \dots, E_n\}$ serán todas matrices elementales.

- *a*) $\implies$ *b*)
  Como $E_1 \cdot ... \cdot E_n A = I$, entonces $A = E_n^{-1} \cdot ... \cdot E_1^{-1} I$, luego $A \sim I$.
- *b*) $\implies$ *c*)
  Como $A = E_1 \cdot ... \cdot E_n$, entonces $A \cdot E_n^{-1} \cdot ... \cdot E_1^{-1} = I$ y por lo tanto A es invertible.
- *c*) $\implies$ *d*)
  Definamos $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ por $g(x) = A^{-1}x$ (que tiene sentido pues A es invertible). Luego:
  $$f(g(x)) = f(A^{-1}x) = A(A^{-1}x) = x \qquad\qquad g(f(x)) = g(Ax) = A^{-1}(Ax) = x$$
  Luego la f es invertible como función y por tanto es biyectiva, en particular es inyectiva.
- *d*) $\implies$ *e*)
  Es claro que si $x = 0$, entonces $Ax = 0$, demostremos la otra implicancia. En efecto si $x \in \mathbb{R}^n$ es tal que $Ax = 0$ como además $A0 = 0$ tenemos que $f(x) = f(0)$, como f es inyectiva $x = 0$.
- *e*) $\implies$ *f*)
  Notemos que el sistema $Ax = 0$ tiene una única solución en $x = 0$ (es claro que es solución además es única pues si existiese y tal que $Ay = 0$, entonces $y = 0$). Entonces, tenemos que si escalonamos la matriz $(A|0)$:
  $$(A|0) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Forma final}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{array}\right)$$
  Ignorando la ultima columna (que nunca cambia), tenemos que A es fila-equivalente a la identidad, es decir existen matrices $E_1, E_2, \dots E_n$ tales que al premultiplicar por A da la identidad. Luego sea $b = (b_1, ..., b_n)$ un vector arbitrario, entonces:
  $$E_1 \cdot ... \cdot E_n \cdot \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & b'_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b'_n \end{array}\right)$$
  De donde concluimos que $b' = (b'_1, ..., b'_n)$ es una solución. Supongamos hubiese otra solución y. Entonces
  $$A(b' - y) = Ab' - Ay = b - b = 0$$
  Luego $(b' - y)$ es solución de $Ax = 0$, lo que implica que $b' - y = 0$. Por tanto b' es la única solución.
- *f*) $\implies$ *a*)
  Si $Ax = b$ tiene solución única, en particular $Ax = 0$ tiene solución única, como $x = 0$ es solución, razonando de manera análoga a la parte anterior podemos concluir que A es fila-equivalente a la identidad.

P5. [P1 Control 1, Año 2009]

Considere el sistema lineal:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & \alpha x_2 & & & - & \beta x_4 & = & 0 \\ & + & \alpha x_2 & + & x_3 & + & \beta x_4 & = & \alpha \\ \beta x_1 & + & \alpha x_2 & + & \beta x_3 & & & = & \beta \\ \alpha x_1 & & & + & \beta x_3 & & & = & 0 \end{array}$$

Donde x_1, x_2, x_3, x_4 son incógnitas y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ son valores fijos.

a) Determine condiciones sobre α y β de manera que el sistema tenga infinitas, solo una o ninguna solución.

b) Para $\alpha = 1$ y $\beta = 2$ (de ser posible), resuelva el sistema .

Solución 5.

a) Tomando la matriz aumentada y escalonando nos queda:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\alpha & 0 & -\beta & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \beta & \alpha \\ \beta & \alpha & \beta & 0 & \beta \\ \alpha & 0 & \beta & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[f_4=-\alpha f_1+f_4]{f_3=-\beta f_1+f_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\alpha & 0 & -\beta & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \beta & \alpha \\ 0 & \alpha(1+\beta) & \beta & \beta^2 & \beta \\ 0 & \alpha^2 & \beta & \alpha\beta & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[f_4=-\alpha f_2+f_4]{f_3=-(1+\beta)f_2+f_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\alpha & 0 & -\beta & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \beta & \alpha \\ 0 & 0 & -1 & -\beta & \beta-\alpha(1+\beta) \\ 0 & 0 & \beta-\alpha & 0 & -\alpha^2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_4=(\beta-\alpha)f_3+f_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\alpha & 0 & -\beta & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \beta & \alpha \\ 0 & 0 & -1 & -\beta & \beta-\alpha(1+\beta) \\ 0 & 0 & 0 & -\beta(\beta-\alpha) & -\alpha^2+(\beta-\alpha)(\beta-\alpha-\alpha\beta) \end{array}\right)$$

Analizando el sistema ya escalonado concluimos lo siguiente:

- Si $\alpha \neq \beta$, $\beta \neq 0$ y $\alpha \neq 0$ se tiene solución única. Debemos analizar todos los casos restantes.
- Si $\alpha = 0$ y $\beta \neq 0$, entonces las filas dos y tres quedan con ecuaciones contradictorias, por tanto no existe solución.
- Si $\alpha \neq 0$ y $\beta = 0$, en la fila 4 tenemos que la última fila es nula y además todas las filas siguen siendo compatibles, luego hay infinitas soluciones.
- Si $\alpha = \beta = 0$, hay que continuar escalonando y obtenemos que hay infinitas soluciones.
- Si $\alpha = \beta$ con ambos distintos de 0, en la fila 4 tenemos que $0 = -\alpha^2$ lo que no es posible pues $\alpha \neq 0$, por ende no hay solución.

b) Por el análisis anterior sabemos que la solución existe y es única. Reemplazando los valores tenemos:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

Luego:

$$\begin{array}{rcl} x_4 & = & 1 \\ x_3 + 2x_4 & = & 1 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 & = & 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_4 & = & 0 \end{array} \implies \begin{array}{rcl} x_4 & = & 1 \\ x_3 & = & -1 \\ x_2 & = & 0 \\ x_1 & = & 2 \end{array}$$