MA1102-6 Álgebra Lineal
Profesor: Mauricio Telias H.
Auxiliar: Arturo Merino F.

Auxiliar 2 : Sistemas Lineales

21 de septiembre del 2016

Recordemos:

Def: Se definen las matrices de permutación $I_{pq} \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ como la matriz, que es la identidad con las filas p y q permutadas. Si $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$, entonces $I_{pq}A$ es la matriz A con las filas p y q permutadas.

Def: Se definen las matrices elementales $E_{pq}(\lambda) \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ como la matriz, que es la identidad salvo que en la posición q, p hay un λ. Si $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$, entonces $E_{pq}(\lambda)A$ es la matriz A salvo que la fila q tiene sumada a la fila p ponderada por $\lambda \in \mathbb{K}$.

Def: Diremos que una matriz A esta escalonada si:

1. Todas las filas no-nulas estan sobre las filas nulas.
2. El pivote (primer coeficiente no nulo) de una fila no -nula está siempre estrictamente a la derecha del pivote de la fila de más arriba.

Pro: Sea A una matriz. Podemos premultiplicar A por una colección de matrices elementales $E_1, \ldots, E_n$,

$$\tilde{A} = \left(\prod_{j=1}^{n} E_j\right) A$$

de manera que $\tilde{A}$ esté escalonada. Si este escalonamiento no tiene ceros en la diagonal, entonces A es invertible.

Pro: [**Algoritmo de Gauss**] Para resolver $Ax = b$ (con A invertible).

1. Escribir la matriz aumentada $(A|b)$.
2. Escalonar la matriz aumentada obteniendo $(\tilde{A}|\tilde{b})$.
3. Pasar la matriz aumentada a forma final, obteniendo $(A'|b')$.
4. b' es solución.

P1. [**Varios**]
Considere los sistemas de ecuaciones:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & z & = & 8 \\ -3x & - & y & + & 2z & = & -11 \\ -2x & + & y & + & 2z & = & -3 \end{array} \qquad \begin{array}{rcrcrcr} 2\sin\alpha & - & \cos\beta & + & 3\tan\gamma & = & 3 \\ 4\sin\alpha & + & 2\cos\beta & - & 2\tan\gamma & = & 10 \\ 6\sin\alpha & - & 3\cos\beta & + & \tan\gamma & = & 9 \end{array}$$

Escriba cada uno de forma matricial ($Ax = b$), luego (de ser posible), resuelva el sistema escalonando la matriz aumentada $(A|b)$.

P2. [**Fila-equivalencia**]
Se define la relación $\sim$ en $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ por:

$$A \sim B \iff \text{Existen matrices elementales } E_1, E_2, ..., E_n \text{ tales que } \left(\prod_{i=1}^{n} E_i\right) A = B$$

Muestre que $\sim$ es una relación de equivalencia.

P3. [P1 Control 1, Año 2014]

Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y considere el siguiente sistema lineal

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & +3x_2 & +4x_3 & = & \beta \\ 3x_1 & +4x_2 & +\alpha x_3 & = & 1 \end{array}$$

a) Determine los valores de α y β para los cuales el sistema tiene solución única, no tiene solución, tiene infinitas soluciones y en este último caso determine dichas soluciones.

b) Para $\alpha = 4$ resuelva el sistema.

P4. [Caracterizaciones de la Invertibilidad]

Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ y $x, b \in \mathbb{R}^n$. Demuestre que las siguientes proposiciones son equivalentes.

a) A es fila-equivalente a la identidad.

b) A puede ser escrito como un producto de matrices elementales.

c) A es invertible.

d) La función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por $f(x) = Ax$ es inyectiva.

e) $Ax = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

f) Para un b fijo, el sistema de ecuaciones $Ax = b$, tiene una única solución x.

P5. [P1 Control 1, Año 2009]

Considere el sistema lineal:

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & - & \alpha x_2 & & & - & \beta x_4 & = & 0 \\ & + & \alpha x_2 & + & x_3 & + & \beta x_4 & = & \alpha \\ \beta x_1 & + & \alpha x_2 & + & \beta x_3 & & & = & \beta \\ \alpha x_1 & & & + & \beta x_3 & & & = & 0 \end{array}$$

Donde x_1, x_2, x_3, x_4 son incógnitas y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ son valores fijos.

a) Determine condiciones sobre α y β de manera que el sistema tenga infinitas, solo una o ninguna solución.

b) Para $\alpha = 1$ y $\beta = 2$ (de ser posible), resuelva el sistema .