MA1102-6Álgebra Lineal
Profesor: Mauricio Telias H.
Auxiliar: Arturo Merino F.

Análisis de soluciones

18 de septiembre del 2016

Definición 1 (Forma Escalonada)**.** Una matriz $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ se dirá en forma escalonada si:

1. Todas las filas no-nulas estan sobre las filas nulas.
2. El pivote (primer coeficiente no nulo) de una fila no-nula está siempre estrictamente a la derecha del pivote de la fila de más arriba.

Para encontrar las distintas soluciones de un sistemas lineal, primero debemos escalonar la matriz aumentada $(A|b)$, obteniendo una matriz que este en forma escalonada $(\tilde{A}|\tilde{b})$. Para hacer el análisis de soluciones veremos que bastara con mirar la diagonal principal, los pivotes y los coeficientes del vector b a partir de la ultima fila no-nula.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{n+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{n+2} \end{array}\right)$$

Figura 1: En este caso debemos fijarnos en las componentes marcadas con rojo

Tenemos entonces las siguientes opciones:

1. **Existe solución única:** Este es el caso donde no hay ceros en la diagonal principal y las ecuaciones que siguen no son contradictorias; por tanto la solución es única.

   Ejemplo 1. *Los siguientes sistemas tienen solucion única:*

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 & 124 \\ 0 & 2 & 17 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 8 & 4 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 12 \end{array}\right)$$

2. **No hay solución (inconsistente):** Diremos que un sistema es inconsistente si posee filas de 0's en la matriz A y la componente b que corresponde a estas filas no es 0. En este caso el sistema no tiene solución.

   Ejemplo 2. *Los siguientes sistemas son inconsistentes:*

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 & 124 \\ 0 & 2 & 17 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 2 & 14 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 8 & 4 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

3. **Infinitas soluciones:** Este es el caso donde existen ceros en la diagonal principal, pero no tenemos ninguna ecuación contradictoria (las filas de sólo ceros en la matriz A tienen componente en b no nula), es decir, estamos en presencia de variables libres e infinitas soluciones.

   Ejemplo 3. *Los siguientes sistemas tienen infinitas soluciones:*

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 & 124 \\ 0 & 2 & 17 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 2 & 14 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 8 & 4 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

   Donde la segunda matriz tiene infinitas soluciones pues es equivalente a una matriz de 4×5 que contiene puros ceros en las siguientes coordenadas.

   Ejemplo 4. *(**Un caso curioso**) El sistema*

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 & 124 \\ 0 & 2 & 17 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

   Es contradictorio, a pesar de que ninguna fila de 0's de A tiene algo distinto de 0 en b. Esto se debe a que el escalonamiento no está completo pues existen dos pivotes a la misma altura, luego:

$$\xrightarrow{f_3 = -5f_4 + f_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 & 124 \\ 0 & 2 & 17 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{f_4 \leftrightarrow f_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 & 124 \\ 0 & 2 & 17 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

   Con lo que concluimos lo contradictorio del sistema (pues la cuarta fila tiene sólo 0's en A, pero tiene un 4 en b).