MA1102-6 Álgebra Lineal
Profesor: Mauricio Telias H.
Auxiliar: Arturo Merino F.

Pauta 1 : Álgebra de Matrices

12 de septiembre del 2016

P1. [Varios]

a) Muestre que A^2 es invertible si y sólo si A es invertible.

b) Considere la relación $\sim$ en $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ definida por:

$$A \sim B \iff AB = BA$$

¿Es $\sim$ una relación de equivalencia? Argumente su respuesta.

c) Considere la matriz $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de Fibonacci, demuestre $\forall n \in \mathbb{N}^+$ la siguiente fórmula:

$$F^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}$$

Solución 1.

a)
- $(\implies)$
  Sea C la inversa de A^2, entonces $A(AC) = A^2C = I$.
- $(\impliedby)$
  Sea D la inversa de A, entonces $A^2(DD) = A(AD)D = AID = AD = I$.

b) $\sim$ no es de equivalencia (si $n \geq 2$). Falla la transitividad, basta notar que I conmuta con todas las matrices, pero no todas las matrices conmutan (si $n \geq 2$).

c) Razonemos por inducción.

- **Caso Base:** $(n = 1)$
  El caso base se tiene pues $F = \begin{pmatrix} f_2 & f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix}$.
- **Hipótesis Inductiva:**
  $F^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}$
- **Paso Inductivo:**
  Veamos el caso $n + 1$:

$$\begin{aligned} F^{n+1} &= FF^n \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f_n + f_{n+1} & f_n + f_{n-1} \\ f_{n+1} & f_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f_{n+2} & f_{n+1} \\ f_{n+1} & f_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De esto concluimos.

P2. [Simetría en Matrices]
Diremos que una matriz $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ es *simétrica* si $A^t = A$, de similar manera si $A^t = -A$ le llamaremos *antisimétrica.*

a) Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$. Muestre que AA^t es simétrica.

b) Sean $A, B \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ matrices simétricas. Muestre que AB es simétrica si y sólo si $AB{=}BA$.
Obs: Note que esto implica que el producto de matrices diagonales conmuta.

c) Muestre que para toda matriz $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ la matriz $A + A^t$ es simétrica, muestre ademas que $A - A^t$ es antisimétrica. Concluya que toda matriz cuadrada a valores reales puede ser escrita como la suma de una matriz simétrica y antisimétrica.

Solución 2.

a) Verifiquemos que AA^t es simétrica:

$$(AA^t)^t = (A^t)^t A^t = AA^t$$

b) ▪ ($\Longrightarrow$)

$$AB = (AB)^t = B^t A^t = BA$$

▪ ($\Longleftarrow$)

$$AB = BA = ((BA)^t)^t = (A^t B^t)^t = (AB)^t$$

c) Veamos que $A + A^t$ es simétrica:

$$(A + A^t)^t = (A^t + (A^t)^t) = (A + A^t)$$

Y que $A - A^t$ es antisimétrica:

$$(A - A^t)^t = (A^t - (A^t)^t) = (A^t - A) = -(A - A^t)$$

Para la segunda parte notemos que toda matriz A se puede escribir como:

$$A = \underbrace{\frac{1}{2}(A + A^t)}_{\text{Simétrica}} + \underbrace{\frac{1}{2}(A - A^t)}_{\text{Antisimétrica}}$$

.

P3. [P3 Control 1, Año 2014]

a) Sea $B \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ tal que B es invertible y $B^5 - B = 0$. Calcule B^{-1}.

b) Sea

$$A = (1)_{n\times n} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}), \quad n > 1$$

Encuentre $k \in \mathbb{R}$ tal que $(I - A)^{-1} = I + kA$.

c) Sean $A, B, C \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ tales que A y B son simétricas y A es invertible. Demuestre que $C^t(A^{-1} + B)C$ es simétrica.

Solución 3.

a) Notemos que como B es invertible B^{-1} tiene sentido, luego:

$$\begin{aligned} B^5 - B &= 0 \\ B^5 &= B \\ B^5(B^{-1})^2 &= B(B^{-1})^2 \\ B^3 &= B^{-1} \end{aligned}$$

De donde tenemos que B^{-1} debe ser B^3.

b) Tenemos la siguiente cadena de equivalencias:

$$\begin{array}{ll} & I + kA \text{ es la inversa de } (I - A) \\ \iff & (I + kA)(I - A) = I \\ \iff & I - A + kA - kA^2 = I \\ \iff & (k-1)A - kA^2 = 0 \end{array}$$

Notemos que el k a obtener debe satisfacer lo anterior. Calculemos A^2, para esto notemos que si $C = A^2$ entonces:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{a_{ik}}_{=1} \underbrace{a_{kj}}_{=1} = \sum_{k=1}^{n} 1 = n$$

Es decir la matriz $C = A^2$ es una matriz que contiene solo n's en sus entradas, es decir $A^2 = nA$. Aplicando esto a la ecuación que teniamos obtenemos:

$$\begin{aligned} (k-1)A - knA &= 0 \\ (k - 1 - kn)A &= 0 \end{aligned}$$

Notemos que como $A \neq 0$ y al multiplicarlo por $(k - 1 - kn)$ obtenemos la matriz 0, por tanto tenemos que $(k - 1 - kn)$ debe ser igual a 0. Finalmente:

$$\begin{aligned} k - 1 - kn &= 0 \\ k - kn &= 1 \\ k(1-n) &= 1 \\ k &= \frac{1}{1-n} \end{aligned}$$

c) Notemos que como A es simétrica $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1} = A^{-1}$, recordemos además que $B = B^t$. Calculemos $(C^t(A^{-1}+B)C)^t$:

$$\begin{aligned}
(C^t[(A^{-1}+B)C])^t &= [(A^{-1}+B)C]^t(C^t)^t \\
&= C^t(A^{-1}+B)^tC \\
&= C^t(\underbrace{(A^{-1})^t}_{=A^{-1}} + \underbrace{B^t}_{=B})^tC \\
&= C^t(A^{-1}+B)C
\end{aligned}$$

Es decir $C^t(A^{-1}+B)C$ es simétrica.

P4. [Idempotencia]
Sea $P \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ una matriz *idempotente*, es decir una matriz tal que $P = P^2$:

a) Muestre que la única matriz invertible e idempotente es la identidad.

b) Demuestre que $\forall k \in \mathbb{N}^+$, $P^k = P$.

c) Sea $A = I - P$, demuestre que $A^k = A$, $\forall k \in \mathbb{N}^+$.

d) Sean ahora $P_1, P_2 \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$, tal que $P_1 = P_1P_2$ y $P_2 = P_2P_1$. Muestre que tanto P_1 como P_2 son idempotentes.

e) Demuestre que P es idempotente si y sólo si $P^2(I - P) = 0$ y $P(I - P)^2 = 0$.

Solución 4.

a) Notemos que si A fuera una matriz idempotente e invertible, entonces tenemos que $A^2 = A$ y que A^{-1} existe. Multiplicando entonces $A^2 = A$ por A^{-1} a ambos lados obtenemos que $A = I$.

b) Hagámoslo por inducción:

- **Caso Base:** $(k = 1)$
  Es claro que $P^1 = P$.
- **Hipótesis Inductiva:**
  $P^k = P$.
- **Paso Inductivo:**
  Demostrémoslo para el caso $k + 1$, en efecto:

$$P^{k+1} = \underbrace{P^k}_{=P} P = \underbrace{PP}_{=P} = P$$

  De donde se conluye.

c) Por *b*) basta demostrar que $A^2 = A$, luego:

$$A^2 = (I - P)^2 = I^2 - 2P + P^2 = I - 2P + P = I - P = A$$

d) Veamoslo para P_1:

$$P_1^2 = (P_1P_2)^2 = P_1(P_2P_1)P_2 = (P_1P_2)P_2 = P_1P_2 = P_1$$

Para P_2 es analogo (basta intercambiar los 1's con 2's).

e)
- $(\implies)$
  Como P es idempotente $P^2 = P$, de esto $P(I-P) = 0$, recordando que $P = P^2$ tenemos $P^2(I-P) = 0$. Para la segunda vale notar que por *c*) $I - P$ es idempotente, luego $(I - P) = (I - P)^2$, reemplazando nos queda $P(I - P)^2 = 0$.
- $(\impliedby)$
  De la primera obtenemos que $P^2 = P^3$, desarrollando la segunda tenemos $P(I-2P+P^2) = P-2P^2 + P^3 = P - 2P^2 + P^2 = P - P^2 = 0$, por tanto $P = P^2$, es decir P es idempotente.

P5. [P3 Control 1, Año 2015]

a) Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ tal que $I - A$ es invertible.

1) Probar que:

$$(I + A)(I - A)^{-1} = (I - A)^{-1}(I + A)$$

Hint: Multiplique por $(I - A)$.

2) Suponiendo que $A^t = -A$ y que $(I - A)$ es invertible pruebe que $BB^t = I$ donde $B = (I + A)(I - A)^{-1}$.

b) Sea $J \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ la matriz definida por $J_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i + 1 \\ 0 & \text{si } j \neq i + 1 \end{cases}$. Es decir:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Probar que la matriz $D = J^2$ satisface: $D_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i + 2 \\ 0 & \text{si } j \neq i + 2 \end{cases}$.

2) Usando el resultado anterior demuestre por inducción en k que J^k es la matriz: $J^k_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i + k \\ 0 & \text{si } j \neq i + k \end{cases}$.

Solución 5.

a) 1) Notemos primero que:

$$(I + A)(I - A) = I - A^2 = (I - A)(I + A)$$

Trabajemos esta igualdad:

$$\begin{aligned} (I + A)(I - A) &= (I - A)(I + A) && / \cdot (I - A)^{-1} \\ (I + A) &= (I - A)(I + A)(I - A)^{-1} && /(I - A)^{-1} \cdot \\ (I - A)^{-1}(I + A) &= (I + A)(I - A)^{-1} \end{aligned}$$

De donde se concluye

2) Notemos primero que $(I - A)^t = I + A$ es invertible pues $(I - A)$ lo es. Calculemos:

$$\begin{aligned} BB^t &= (I + A)(I - A)^{-1}[(I + A)(I - A)^{-1}]^t \\ &= (I + A)(I - A)^{-1}[(I - A)^{-1}]^t(I + A)^t \\ &= (I + A)(I - A)^{-1}(I - A^t)^{-1}(I + A^t) \\ &= (I - A)^{-1}\underbrace{(I + A)(I + A)^{-1}}_{I}(I - A) \\ &= (I - A)^{-1}(I - A) \\ &= I \end{aligned}$$

b) 1) Notemos que:

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^{n} J_{ik}J_{kj}$$

Para que el sumando del lado derecho no sea 0, necesitamos que $J_{ik} \neq 0$ y $J_{kj} \neq 0$, es decir necesitamos $k = i + 1$ y $j = k + 1$ es decir $j = i + 2$ es el único caso que podría ser no nulo. Por tanto:

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^{n} J_{ik}J_{kj} = J_{i,i+1}J_{i+1,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i + 2 \\ 0 & \text{si } j \neq i + 2 \end{cases}$$

2) El caso base se hizo en la parte 1). Veamos el caso inductivo:

$$J_{ij}^{N+1} = \sum_{k=1}^{n} J_{ik}^{N} J_{kj}$$

Para que el sumando del lado derecho no sea 0, necesitamos que $J_{ik} \neq 0$ y $J_{kj} \neq 0$, es decir necesitamos $k = i + N$ y $j = k + 1$ es decir $j = i + N + 1$ es el único caso que podría ser no nulo. Por tanto:

$$J_{ij}^{N+1} = \sum_{k=1}^{n} J_{ik}^{N} J_{kj} = J_{i,i+N} J_{i+N,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i + N + 1 \\ 0 & \text{si } j \neq i + N + 1 \end{cases}$$

De donde se concluye.