MA1102-6 Álgebra Lineal
Profesor: Mauricio Telias H.
Auxiliar: Arturo Merino F.

Auxiliar 1 : Álgebra de Matrices

12 de septiembre del 2016

Recordemos:

Def: Una matriz $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ la representaremos de la manera:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Donde cada $a_{ij} \in \mathbb{K}$. Diremos además que dos matrices son iguales, si lo son a coordenadas.

Def: Definimos las suma para matrices de igual dimensión por coordenadas, es decir si $C = A + B$ entonces:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Pro: $(\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K}), +)$ es un grupo abeliano.

Def: Si A es una matriz de $m \times n$ y B es una matriz de $n \times p$. Definimos $C = AB$ como:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Pro: $(\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ es un anillo con unidad.

Def: Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ definimos $A^k = AA^{k-1}$ con la convención $A^0 = I$.

Def: $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ se dirá triangular superior si $a_{ij} = 0$ cuando $i > j$. De manera análoga se dirá triangular inferior si $a_{ij} = 0$ cuando $i < j$. Por último si una matriz es triangular superior e inferior diremos que es diagonal.

Pro: El producto de matrices triangulares superiores, inferiores o diagonales es una matriz triangular, superior o diagonal respectivamente.

Def: Definimos la matriz traspuesta de A, llamada A^t por

$$(a^t)_{ij} = a_{ji}$$

Def: Si una matriz A verifica que $A = A^t$ diremos que A es simétrica.

Pro: Sean A, B matrices tal que AB tiene sentido. Entonces:

1. $(A^t)^t = A$.
2. $(AB)^t = B^t A^t$.
3. Si A es diagonal, entonces A es simétrica.

Def: Diremos que una matriz $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ es invertible si existe $B \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ tal que: $AB = I = BA$.

Pro: Sean $A, B \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$. Luego:

1. $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
3. Para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$.
4. $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

P1. [Varios]

a) Muestre que A^2 es invertible si y sólo si A es invertible.

b) Considere la relación $\sim$ en $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ (con $n > 1$) definida por:

$$A \sim B \iff AB = BA$$

¿Es $\sim$ una relación de equivalencia? Argumente su respuesta.

c) Considere la matriz $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de Fibonacci. Demuestre $\forall n \in \mathbb{N}^+$ la siguiente fórmula:

$$F^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}$$

P2. [Simetría en Matrices]
Diremos que una matriz $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ es *simétrica* si $A^t = A$, de similar manera si $A^t = -A$ le llamaremos *antisimétrica*.

a) Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$. Muestre que AA^t es simétrica.

b) Sean $A, B \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ matrices simétricas. Muestre que AB es simétrica si y sólo si $AB{=}BA$.

c) Muestre que para toda matriz $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ la matriz $A + A^t$ es simétrica, muestre ademas que $A - A^t$ es antisimétrica. Concluya que toda matriz cuadrada a valores reales puede ser escrita como la suma de una matriz simétrica y antisimétrica.

P3. [P3 Control 1, Año 2014]

a) Sea $B \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ tal que B es invertible y $B^5 - B = 0$. Calcule B^{-1}.

b) Sea

$$A = (1)_{n\times n} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}), \quad n > 1$$

Encuentre $k \in \mathbb{R}$ tal que $(I - A)^{-1} = I + kA$.

c) Sean $A, B, C \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ tales que A y B son simétricas y A es invertible. Demuestre que $C^t(A^{-1} + B)C$ es simétrica.

P4. [Idempotencia]
Sea $P \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ una matriz *idempotente*, es decir una matriz tal que $P = P^2$:

a) Muestre que la única matriz invertible e idempotente es la identidad.

b) Demuestre que $\forall k \in \mathbb{N}^+$, $P^k = P$.

c) Sea $A = I - P$, demuestre que $A^k = A$, $\forall k \in \mathbb{N}^+$.

d) Sean ahora $P_1, P_2 \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$, tal que $P_1 = P_1P_2$ y $P_2 = P_2P_1$. Muestre que tanto P_1 como P_2 son idempotentes.

e) Demuestre que P es idempotente si y sólo si $P^2(I - P) = 0$ y $P(I - P)^2 = 0$.

P5. [P3 Control 1, Año 2015]

a) Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ tal que $I - A$ es invertible.

1) Probar que:

$$(I + A)(I - A)^{-1} = (I - A)^{-1}(I + A)$$

Hint: Multiplique por $(I - A)$.

2) Suponiendo que $A^t = -A$ y que $(I - A)$ es invertible pruebe que $BB^t = I$ donde $B = (I + A)(I - A)^{-1}$.

b) Sea $J \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ la matriz definida por $J_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i + 1 \\ 0 & \text{si } j \neq i + 1 \end{cases}$. Es decir:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Probar que la matriz $D = J^2$ satisface: $D_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i + 2 \\ 0 & \text{si } j \neq i + 2 \end{cases}$.

2) Usando el resultado anterior demuestre por inducción en k que J^k es la matriz: $J^k_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i + k \\ 0 & \text{si } j \neq i + k \end{cases}$.