Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1102 - 4 Álgebra Lineal
27 de Noviembre de 2016

Clase Auxiliar # 10: Valores y Vectores Propios y Diagonalización

Profesora: Natacha Astromujoff
Profesor Auxiliar: Nicolás Zalduendo

P1. Considere la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Encuentre todos los valores y vectores propios de M.

(b) Para cada valor propio, encuentre su subespacio propio asociado.

P2. Sean $A, B, R, S \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ con $A = RS$ y $B = SR$, con S invertible.

(a) Pruebe que $v \in \mathbb{R}^n$ es vector propio de A asociado a $\lambda \in \mathbb{R}$ ssi Sv es vector propio de B asociado al mismo valor λ. Concluya que A y B tienen los mismos valores propios.

(b) Sean $W_\lambda(A)$ y $W_\lambda(B)$ los subespacios propios asociados a λ de A y de B respectivamente. Pruebe que $dim(W_\lambda(A)) = dim(W_\lambda(B))$.

P3. Sean $A, B \in \mathcal{M}_{33}(\mathbb{R})$ dadas por:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para cada una de ellas se pide lo siguiente:

(a) Calcule valores y vectores propios

(b) Determine si es o no diagonalizable. Fundamente.
En caso de ser diagonalizable encuentre una matriz P invertible y una matriz D tal que la matriz se escriba como PDP^1

P4. Sea $A = PDP^{-1} \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ con D diagonal y P invertible. Suponga que 1 y -1 NO son valores propios de A. Demuestre que $\forall k \in \mathbb{N}$ la matriz:

$$B = I + A + \cdots + A^k = \sum_{i=0}^{k} A^i$$

es invertible y determine explícitamente la inversa de B

P5. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 \\ 4 & -3 & 4 \\ 10 & -10 & -11 \end{pmatrix}$$

(i) Calcule el polinomio característico de A, los valores propios de A y sus multiplicidades algebráicas.

(ii) Determinar los espacios propios asociados a cada valor propio y calcule las multiplicidades geométricas de cada valor propio.

(iii) Concluya que A es diagonalizable y explicite las matrices P y D.