MA1101-2 Introducción al Álgebra
Profesor: José Soto
Auxiliares: Arturo Merino, Nicolás Zalduendo

Pauta 14 : Forma polar y raíces de la unidad

9 de diciembre del 2016

P1. [Varios]

a) Demuestre que las soluciones de la ecuación $x^2 + x + 1 = 0$ son raíces cúbicas de la unidad distintas de 1.

b) A partir del producto $(1+i)(5-i)^4$ pruebe que:

$$\pi = 16 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - 4\arctan\left(\frac{1}{239}\right)$$

c) Encuentre los $z \in \mathbb{C}$ que verifican:

$$z^4 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$$

d) Calcule $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

Hint: Utilice las raíces quintas de la unidad de manera adecuada.

Solución 1.

a) Notemos que si:

$$x^2 + x + 1 = 0 \implies x^3 + x^2 + x = 0$$

Igualando estas dos ecuaciones tenemos:

$$x^2 + x + 1 = x^3 + x^2 + x \implies x^3 = 1$$

De donde concluimos que las soluciones son raíces cúbicas de la unidad. Supongamos que son 1, luego:

$$1^2 + 1 + 1 = 0 \implies 3 = 0$$

Lo que sería una contradicción.

b) Notemos que en forma polar:

$$(1+i) = \sqrt{2}\exp\left(\frac{\pi}{4}i\right) \qquad (5-i) = \sqrt{26}\exp\left(-\arctan\left(\frac{1}{5}\right)i\right)$$

De esto concluimos que:

$$(1+i)(5-i)^4 = \sqrt{2}(26)^2\exp\left(\left(\frac{\pi}{4} - 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right)\right)i\right)$$

Mientras que si expandimos el producto de la manera tradicional tenemos:

$$\begin{aligned}
(1+i)(5-i)^4 &= (1+i)((5-i)^2)^2 \\
&= (1+i)(25-10i-1)^2 \\
&= (1+i)(24^2 - 480i - 10^2) \\
&= (1+i)(476-480i) \\
&= 476 - 480i + 476i + 480 \\
&= -4i + 956 \\
&= 4(-i+239) \\
&= 4\sqrt{1+239^2}\exp\left(-\arctan\left(\frac{1}{239}\right)\right)
\end{aligned}$$

Igualando los argumentos de los números en forma polar tenemos:

$$\frac{\pi}{4} - 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) = -\arctan\left(\frac{1}{239}\right)$$

De donde podemos concluir la identidad buscada.
Obs : Cabe notar que podemos igualar argumentos pues ambos se encuentran en el intervalo $(-\pi, \pi]$.

c) Buscamos las raíces cuartas de $\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$. Pasandolo a forma polar tenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} &= \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}} \\
&= \frac{1+2\sqrt{3}i+3i^2}{4} \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\
&= \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\
&= e^{i\frac{2\pi}{3}}
\end{aligned}$$

Sabemos entonces que las soluciones son de la forma $\sqrt[n]{R}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$ con $k \in \{0,1,2,3\}$. En nuestro caso quedan $\sqrt[4]{1}e^{i\frac{(2\pi/3)+2k\pi}{4}} = e^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2})}$. Luego:

$$z_1 = e^{i\pi/6} \qquad z_2 = e^{i(\pi/6+\pi/2)} \qquad z_3 = e^{i(\pi/6+\pi)} \qquad z_4 = e^{i(\pi/6+3\pi/2)}$$

d) Recordando que la suma de las raíces quintas da 0, tenemos:

$$1 + e^{2i\pi/5} + e^{4i\pi/5} + e^{6i\pi/5} + e^{8i\pi/5} = 0$$

Tomando parte real, concluimos que:

$$\begin{aligned}
1 + \cos(2\pi/5) + \cos(4\pi/5) + \cos(6\pi/5) + \cos(8\pi/5) &= 0 \\
1 + \cos(2\pi/5) + \cos(4\pi/5) + \cos(4\pi/5) + \cos(2\pi/5) &= 0 \\
1 + 2\cos(2\pi/5) + 2\cos(4\pi/5) &= 0
\end{aligned}$$

Ocupando la identidad $\cos(2\alpha) = 2\cos(\alpha)^2 - 1$ tenemos que:

$$4\cos(2\pi/5)^2 + 2\cos(2\pi/5) - 1 = 0$$

Resolviendo la cuadrática tenemos que:

$$\cos(2\pi/5) = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\cdot 4\cdot(-1)}}{2\cdot 4} = \frac{-2\pm\sqrt{20}}{8} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$$

Recordando que $\cos(2\pi/5) \geq 0$, tenemos que $\cos(2\pi/5) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \approx 0{,}3$.

P2. [Sumas con raíces de la unidad]
Sean $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$ las raíces n-ésimas de la unidad ordenadas de manera usual (es decir, según argumento de manera creciente).

a) Demuestre que:

$$w_0 w_1 + w_1 w_2 + \ldots + w_{n-2} w_{n-1} + w_{n-1} w_0 = 0$$

b) Pruebe que $\forall k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$:

$$\sum_{j=0}^{n-1} (w_j)^k = 0$$

c) Sea $z \in \mathbb{C}$ fijo. Calcule:

$$\sum_{j=0}^{n-1} (z + w_j)^n$$

Solución 2. Recordemos primero que para todo k:

$$w_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$$

Tiene sentido entonces notar que $w_0 = w_n$, $w_1 = w_{n+1}$, $w_2 = w_{n+2}$, etc.... Veamos además que:

$$w_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}} = (e^{i\frac{2\pi}{n}})^k = (w_1)^k$$

a) Calculemos:

$$\begin{aligned}
w_0 w_1 + w_1 w_2 + \ldots + w_{n-2} w_{n-1} + w_{n-1} w_0 &= w_0 w_1 + w_1 w_2 + \ldots + w_{n-2} w_{n-1} + w_{n-1} w_n \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} w_k w_{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (w_1)^k (w_1)^{k+1} \\
&= w_1 \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} (w_1^2)^k}_{\text{Geométrica}} \\
&= w_1 \frac{(w_1^2)^n - 1}{w_1^2 - 1} \\
&= w_1 \frac{(w_1^n)^2 - 1}{w_1^2 - 1} \\
&= w_1 \frac{1^2 - 1}{w_1^2 - 1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

b) Similar a lo hecho en la parte *a*):

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n-1}(w_j)^k &= \sum_{j=0}^{n-1}(w_1^j)^k \\
&= \underbrace{\sum_{j=0}^{n-1}(w_1^k)^j}_{\text{Geométrica}} \\
&= \frac{(w_1^k)^n - 1}{w_1^k - 1} \\
&= \frac{(w_1^n)^k - 1}{w_1^k - 1} \\
&= \frac{1^k - 1}{w_1^k - 1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

c) La idea de esta parte es recordar que el Teorema del Binomio funciona para elementos de $\mathbb{C}$ (de hecho el Teorema del Binomio nos da algo más potente aún, una igualdad de polinomios):

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n-1}(z+w_j)^n &= \sum_{j=0}^{n-1}(z+w_1^j)^n \\
&= \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}w_1^{jk}z^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{k}w_1^{jk}z^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z^{n-k}\left(\sum_{j=0}^{n-1}w_1^{jk}\right) \\
&= \left(\binom{n}{0}z^n + \sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}z^{n-k} + \binom{n}{n}z^0\right)\left(\sum_{j=0}^{n-1}w_1^{jk}\right) \\
&= z^n\underbrace{\left(\sum_{j=0}^{n-1}w_1^{j\cdot 0}\right)}_{\text{Suma de 1's}} + \left(\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}z^{n-k}\right)\underbrace{\left(\sum_{j=0}^{n-1}(w_j)^k\right)}_{=0 \text{ por } b)} + 1\underbrace{\left(\sum_{j=0}^{n-1}(w_1^n)^j\right)}_{\text{Suma de 1's}} \\
&= z^n n + n \\
&= n(z^n+1)
\end{aligned}$$

P3. [P1 Control 7, Año 2007]
Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ complejos unitarios (es decir $|z_1| = |z_2| = 1$) tales que:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= -u, \quad u \in \mathbb{C} \\ z_1 z_2 &= v, \quad\;\; v \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

a) Pruebe que $|u| \leq 2$ y que $|v| = 1$.

b) Pruebe que $\overline{z_1} + \overline{z_2} = -\frac{u}{v}$.

c) Pruebe que $u = \overline{u}v$.

d) Si los ángulos de la forma polar de u y v, son φ y θ respectivamente. Utilice *c*) para demostrar que:

$$\theta = 2\varphi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Solución 3.

a) Tomando modulo a la primera igualdad tenemos:

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2| &= |-u| \\ |z_1 + z_2| &= |u| \end{aligned}$$

Ocupando la desigualdad triangular tenemos:

$$|u| = |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| = 2$$

Tomando modulo a la segunda igualdad tenemos:

$$\begin{aligned} |z_1 z_2| &= |v| \\ |z_1||z_2| &= |v| \\ 1 &= |v| \end{aligned}$$

De donde concluimos.

b) Dividiendo las igualdades del enunciado (podemos pues $|z_1 z_2| \neq 0$ y por ende distinto de 0) tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{z_1 + z_2}{z_1 z_2} &= -\frac{u}{v} \\ \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} &= -\frac{u}{v} \\ \frac{\overline{z_1}}{|z_1|^2} + \frac{\overline{z_2}}{|z_2|^2} &= -\frac{u}{v} \\ \overline{z_1} + \overline{z_2} &= -\frac{u}{v} \end{aligned}$$

c) Conjugando la primera igualdad del enunciado obtenemos $\overline{z_1 + z_2} = \overline{-u}$, combinando esto con *b*) obtenemos:

$$\begin{aligned} \underbrace{\overline{z_1 + z_2}}_{\overline{-u}} &= \underbrace{\overline{z_1} + \overline{z_2}}_{b)} \\ -\overline{u} &= -\frac{u}{v} \\ \overline{u}v &= u \end{aligned}$$

d) En forma polar tenemos que $u = |u|e^{i\varphi}$ y que $v = \underbrace{|v|}_{=1} e^{i\theta} = e^{i\theta}$. Ocupando *c*):

$$\begin{aligned} \overline{u}v &= u \\ |u|e^{-i\varphi}e^{i\theta} &= |u|e^{i\varphi} \\ e^{i(\theta-\varphi)} &= e^{i\varphi} \end{aligned}$$

De donde concluimos que existe k tal que:

$$\theta - \varphi = \varphi + 2k\pi$$

Y por tanto:

$$\theta = 2\varphi + 2k\pi$$

Que era lo buscado.

P4. [Centroide]
El centroide G de un triangulo T es la intersección de sus medianas. Suponga ahora que el triangulo T tiene vertices $a, b, c \in \mathbb{C}$, un hecho conocido (no lo demuestre) es que:

$$G = \frac{1}{3}(a + b + c)$$

Suponga ahora que en los lados de T construimos tres triángulos similares de forma arbitraria. Esto logra construir un nuevo triangulo de vertices $p, q, r \in \mathbb{C}$ como indica la figura. Demuestre que el centroide de este nuevo triangulo coincide con el centroide del triangulo original.

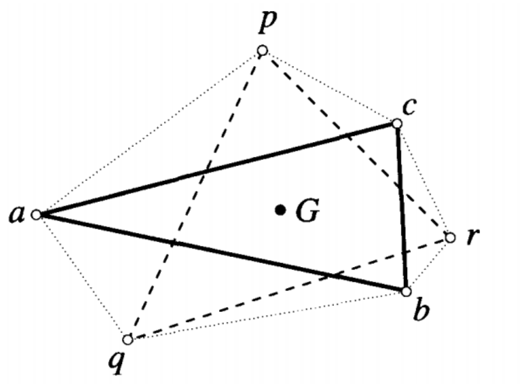

Figura 1: La situación descrita en la P4.

Solución 4. Supongamos que $\angle cap = \alpha$, al ser similares sabemos que $\angle qba = \angle bcr = \angle cap = \alpha$. Por un argumento de similaridad también sabemos que:

$$\frac{\overline{pa}}{\overline{ca}} = \frac{\overline{rc}}{\overline{bc}} = \frac{\overline{qb}}{\overline{ab}} = R$$

De esto concluimos que:

$$(p - a) = Re^{i\alpha}(c - a)$$

Pues recordando la interpretación geometrica de la forma polar, estamos diciendo que el vector $(p - a)$ es un estiramiento por R y una rotación por α del vector $(c - a)$. Si llamamos $\delta = Re^{i\alpha}$, tenemos (de manera análoga) que:

$$(r - c) = \delta(b - c) \qquad (q - b) = \delta(a - b)$$

Sumando todas las ecuaciones tenemos:

$$\begin{aligned} (p - a) + (r - c) + (q - b) &= \delta(c - a) + \delta(b - c) + \delta(a - b) \\ (p - a) + (r - c) + (q - b) &= 0 \\ p + q + r &= a + b + c \end{aligned}$$

Luego si G' es el centroide de $\triangle pqr$ tenemos que:

$$G' = \frac{1}{3}(p + q + r) = \frac{1}{3}(a + b + c) = G$$

De donde concluimos.

P5. [P2 Control 6, Año 2014]

a) Sean $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ tales que $|w_1| = |w_2| = 1$ y $w_1 + w_2 = -1$.

(i) Pruebe que $w_1 = \overline{w_2}$.

(ii) Muestre que $w_0 = 1$, w_1 y w_2 son las raíces cúbicas de la unidad.

b) Sean $z_0, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tales que $|z_0| = |z_1| = |z_2| = 1$ y $z_0 + z_1 + z_2 = 0$. Demuestre que $\exists \theta \in \mathbb{R}$, tal que $z_k = w_k e^{i\theta}$, $k = 0, 1, 2$, donde w_k son los complejos de la parte anterior.

Solución 5.

a) (i) Supongamos $w_1 = a + bi$ y $w_2 = c + di$. Luego tenemos que

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 &= -1 \\ a + bi + c + di &= -1 \end{aligned}$$

Igualando parte real e imaginaria tenemos que:

$$a + c = -1 \qquad b = -d$$

De esto notamos que $b = -d$ y que tanto a como c son negativos, pues es claro que al menos uno es negativo y si alguno fuera positivo, digamos $a > 0$ y $c \leq 0$ sin perdida de generalidad, tendríamos que $c < -1$, es decir $|c| > 1$, como además $|c| = \sqrt{c^2} \leq \sqrt{c^2 + d^2} = |w_2| = 1$, lo que no es posible. Luego:

$$\begin{aligned} |w_1|^2 &= |w_2|^2 \\ a^2 + b^2 &= c^2 + b^2 \end{aligned}$$

Es decir $a^2 = c^2$, como ambos tienen el mismo signo concluimos que $a = c$. Luego $w_1 = a + bi$ y $w_2 = a - bi$, es decir $w_1 = \overline{w_2}$.

(ii) Multiplicando la ecuación por w_1^2 tenemos:

$$\begin{aligned} w_1^3 + w_2 w_1^2 &= -w_1^2 \\ w_1^3 + \overline{w_1} w_1^2 + w_1^2 &= 0 \\ w_1^3 + w_1^2 + w_1 &= 0 \end{aligned}$$

Y como $w_1 \neq 0$, tenemos que $1 + w_1 + w_1^2 = 0$. Ocupando la **P1 a)** concluimos que w_1 es raíz cúbica de la unidad distinta de 1. El razonamiento para w_2 es análogo. Notemos además que $w_1 \neq w_2$ pues si fueran iguales $w_1 = \overline{w_1}$ y por tanto $w_1 \in \mathbb{R}$ y la única raíz cúbica de la unidad es 1, lo que no es posible.

b) Como $|z_0| = 1$, tenemos que $z_0 = e^{i\alpha}$ para algún $\alpha \in \mathbb{R}$. Luego:

$$|z_0 e^{-i\alpha}| = |z_1 e^{-i\alpha}| = |z_2 w^{-i\alpha}| = 1$$

Y además:

$$z_1 e^{-i\alpha} + z_2 e^{-i\alpha} = (z_1 + z_2) e^{-i\alpha} = (-z_0) e^{-i\alpha} = -e^{i\alpha} e^{-i\alpha} = -1$$

Es decir $z_1 e^{-i\alpha}$ y $z_2 w^{-i\alpha}$ satisfacen las condiciones de la parte *a)* y por ende son raíces distintas de la unidad distintas de 1. Concluimos que:

$$z_0 = w_0 e^{-i\alpha} \quad z_1 = w_1 e^{-i\alpha} \quad z_2 = w_2 e^{-i\alpha}$$

Tomando $\theta = -\alpha$ se concluye.