

MA1101-2 Introducción al Álgebra

Profesor: José Soto

Auxiliar: Arturo Merino, Nicolás Zalduendo



Pauta 7 : Principio de Inducción

31 de octubre del 2016

P1. [Todos los caballos tienen el mismo color]

Su amigo Juan Pablo le cuenta que ha notado una cosa curiosa últimamente ¡Todo el mundo se llama Juan Pablo! Usted siendo una persona escéptica y conocedor de que Juan Pablo suele mentir, le pide una demostración de tal afirmación. Orgulloso Juan Pablo le presenta el siguiente argumento:

Demostraremos que toda la gente tiene el mismo nombre, por inducción sobre el número de personas n .

Caso Base ($n = 1$)

Claramente en todo grupo de 1 persona poseen todos el mismo nombre.

Hipótesis Inductiva

Todo grupo de n personas posee el mismo nombre.

Paso Inductivo ($n + 1$)

Consideremos un grupo de $n + 1$ personas. Si tomamos las n primeras personas por Hipótesis inductiva todas deben tener el mismo nombre, de similar manera las n últimas personas deben tener el mismo nombre. Tomando una persona que no sea la primera ni la última vemos que tanto los n primeros como los n últimos deben tener el mismo nombre, por tanto las $n + 1$ personas poseen el mismo nombre.

Para concluir, dice Juan Pablo, como todas las personas tienen el mismo nombre y yo me llamo Juan Pablo, claramente todos nos llamamos Juan Pablo.

¿Donde está el error en el argumento de Juan Pablo?

Solución 1. El error en el argumento de Juan Pablo está en la siguiente línea:

“Tomando una persona que no sea la primera ni la última...”

El problema es que al pasar del caso $n = 1$ al $n = 2$ no existe una persona que no sea ni la primera ni la última, luego la demostración **NO** es válida pues para serlo debe serlo en cualquier paso de la inducción (acá sería válido sólo para los $n \geq 3$).

P2. [Varios]

Demuestre usando el principio de inducción:

- a) n puntos sobre una recta generan $n + 1$ segmentos $\forall n \geq 0$.
 b) $6n < 2^n$ para todo $n \geq n_0$ (debe encontrar tal n_0).
 c) $\sum_{i=0}^n 2^i = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ para todo $n \geq 0$.

Solución 2.

- a) ■ **Caso Base:** ($n = 0$)
 0 puntos generan 1 segmento (la recta completa).
 ■ **Hipótesis Inductiva:**
 n puntos sobre una recta generan $n + 1$ segmentos.
 ■ **Paso Inductivo:**
 Para el caso $n + 1$ “ignoraremos” el último punto luego sabemos que ignorando dicho punto tenemos $n + 1$ segmentos, agregar este último punto agrega un segmento, de donde tenemos un total de $n + 2$.
 b) Calculando los primeros términos:

$$6 \cdot 0 < 2^0 \quad 6 \cdot 1 \geq 2^1 \quad 6 \cdot 2 \geq 2^2 \quad 6 \cdot 3 \geq 2^3 \quad 6 \cdot 4 \geq 2^4 \quad 6 \cdot 5 < 2^5 \quad 6 \cdot 6 < 2^6 \quad 6 \cdot 7 < 2^7$$

De esto conjeturamos que tal n_0 es 5. Demostrémoslo:

- **Caso Base:** ($n = 5$)
 $6 \cdot 5 < 2^5$.
 ■ **Hipótesis Inductiva:**
 $6n < 2^n$.
 ■ **Paso Inductivo:**

$$\begin{aligned} 6(n+1) &= 6n + 6 && \text{/Por H.I.} \\ &< 2^n + 6 && /6 < 2^n \text{ pues } n \geq 5 \\ &< 2 \cdot 2^n \\ &= 2^{n+1} \end{aligned}$$

- c) ■ **Caso Base:** ($n = 0$)
 $\sum_{i=0}^0 2^i = 2^0 = 2^1 - 1$

- **Hipótesis Inductiva:**
 $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$

- **Paso Inductivo:**
 Probemoslo para el caso $n + 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n+1} 2^i &= 2^{n+1} + \sum_{i=0}^n 2^i \\ &= 2^{n+1} + 2^{n+1} - 1 && \text{/H.I.} \\ &= 2 \cdot 2^{n+1} - 1 \\ &= 2^{n+2} - 1 \end{aligned}$$

Con esto concluimos.

P3. Divisibilidad

- a) Demuestre que $n^2 + n$ es par para todo $n \geq 0$.
 b) Demuestre que $3^n + 4^n - 1$ es divisible por 3 para todo $n \geq 1$.
 c) Demuestre que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 5^{2n} + (-1)^{n+1} \text{ es divisible por } 13$$

Solución 3.

- a) ■ **Caso Base:** ($n = 0$)

$0^2 + 0 = 0$ es par.

- **Hipótesis Inductiva:**

$n^2 + n$ es par.

- **Paso Inductivo:**

Probemoslo para el caso $n + 1$:

$$\begin{aligned} (n+1)^2 + (n+1) &= n^2 + 2n + 1 + n + 1 \\ &= \underbrace{n^2 + n}_{\text{par por H.I.}} + 2n + 2 \\ &= 2k + 2n + 2 \\ &= 2(k + n + 1) \end{aligned}$$

Luego $(n+1)^2 + (n+1)$ es par, con esto concluimos.

- b) ■ **Caso Base:** ($n = 1$)

$3^1 + 4^1 - 1 = 6$ es divisible por 3.

- **Hipótesis Inductiva:**

$3^n + 4^n - 1 = 3k$ para algún k .

- **Paso Inductivo:**

Probemoslo para el caso $n + 1$:

$$\begin{aligned} 3^{n+1} + 4^{n+1} - 1 &= 3^{n+1} + 4 \cdot 4^n - 1 \\ &= 3^{n+1} + 4 \cdot 4^n - 1 + \underbrace{4 \cdot 3^n - 4 \cdot 3^n + 4 - 4}_0 \\ &= 3^{n+1} + 4(\underbrace{4^n + 3^n - 1}_{3k}) + 4 - 1 \\ &= 3^{n+1} + 4(3k) + 3 \\ &= 3(3^n + 4k + 1) \end{aligned}$$

Luego $3^{n+1} + 4^{n+1} - 1$ es divisible por 3, con esto concluimos.

- c) ■ **Caso Base:** ($n = 0$)

$5^{2 \cdot 0} + (-1)^{0+1}$ es divisible por 13.

- **Hipótesis Inductiva:**

$5^{2n} + (-1)^{n+1} = 13k$ para algún k .

- **Paso Inductivo:**

Demostremoslo para el caso $n + 1$

$$\begin{aligned} 5^{2(n+1)} + (-1)^{n+1+1} &= 5^{2n+2} + (-1)^{n+2} \\ &= 25 \cdot 5^{2n} + (-1)^{n+2} + \underbrace{25 \cdot (-1)^{n+1} - 25 \cdot (-1)^{n+1}}_0 \\ &= 25(\underbrace{5^{2n} + (-1)^{n+1}}_{13k}) + (-1)(-1)^{n+1} - 25 \cdot (-1)^{n+1} \\ &= 25 \cdot 13k + (-1 - 25)(-1)^{n+1} \\ &= 25 \cdot 13k + (-26)(-1)^{n+1} \\ &= 13(25k - 2(-1)^{n+1}) \end{aligned}$$

P4. [Recurrencias]

- a) Considere la siguiente sucesión definida mediante la recurrencia:

$$s_0 = 0 \quad s_n = 2s_{n-1} + 1$$

Conjeture una fórmula cerrada para s_n y demuéstrela.

- b) Considere la siguiente sucesión de números reales definida por recurrencia:

$$a_0 = 0$$

$$a_{n+1} = \frac{3}{4 - a_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Usando inducción demuestre que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{3(3^n - 1)}{3^{n+1} - 1}.$$

Solución 4.

- a) Computando los primeros términos tenemos:

$$s_0 = 0 \quad s_1 = 1 \quad s_2 = 3 \quad s_3 = 7 \quad s_4 = 15 \quad s_5 = 31 \quad \dots$$

De esto conjeturamos que $s_n = 2^n - 1$. En efecto:

- **Caso Base:** ($n = 0$)

$$s_0 = 0 = 2^0 - 1.$$

- **Hipótesis Inductiva:**

$$s_n = 2^n - 1.$$

- **Paso Inductivo:**

Probémoslo para el caso $n + 1$:

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= 2s_n + 1 \\ &= 2(2^n - 1) + 1 \\ &= 2^{n+1} - 2 + 1 \\ &= 2^{n+1} - 1 \end{aligned}$$

Con esto concluimos.

- b) ■ **Caso Base:** ($n = 0$)

$$a_0 = 0 = \frac{3(3^0 - 1)}{3^1 - 1}.$$

- **Hipótesis Inductiva:**

$$a_n = \frac{3(3^n - 1)}{3^{n+1} - 1}.$$

- **Paso Inductivo:**

Probémoslo para el caso $n + 1$:

$$\begin{aligned}a_{n+1} &= \frac{3}{4 - a_n} \\&= \frac{3}{4 - \frac{3(3^n - 1)}{3^{n+1} - 1}} \\&= \frac{3}{\left(\frac{4 \cdot 3^{n+1} - 4 - 3 \cdot 3^n + 3}{3^{n+1} - 1}\right)} \\&= \frac{3(3^{n+1} - 1)}{4 \cdot 3^{n+1} - 3^{n+1} - 1} \\&= \frac{3(3^{n+1} - 1)}{3 \cdot 3^{n+1} - 1} \\&= \frac{3(3^{n+1} - 1)}{3^{n+2} - 1}\end{aligned}$$

Con esto concluimos.

P5. [Nuggets]

La cadena de comida rápida McKing vende nuggets de pollo en dos modalidades:

- Una bolsa de 3 nuggets.
- Una cajita de 5 nuggets.

Demuestre que si usted quiere comprar $n \geq 8$ nuggets en McKing puede hacerlo de manera exacta (es decir hay una combinación de bolsas y cajitas tal que no le sobran ni faltan nuggets).



Figura 1: Estos 9 nuggets puede ser conseguidos comprando 3 bolsas.

Solución 5. Resolveremos esto de dos maneras. Primera forma:

- **Caso Base:** ($n = 8$)

Si quiero comprar 8 nuggets de manera exacta, puedo comprar una bolsa y una cajita.

- **Hipotesis Inductiva:**

$\forall n \geq 8$ se pueden comprar n nuggets de manera exacta.

- **Paso Inductivo**

Probémoslo para el caso $n + 1$. Como queremos ocupar nuestra hipótesis de inducción veamos que pasa al comprar n nuggets, para esto pongámonos en casos.

- **Caso 1:** (Al comprar los n nuggets compre al menos una cajita)

Notemos que si pudimos comprar n nuggets de manera exacta por al menos una cajita, podemos reemplazar una cajita por dos bolsas y lograríamos comprar $n + 1$ nuggets de manera exacta.

- **Caso 2:** (Al comprar los n nuggets compre puras bolsas)

Si hubiéramos logrado comprar n nuggets con puras bolsas, como $n \geq 8$ sabemos que compramos por lo menos 3 bolsas. Luego basta con reemplazar estas 3 bolsas con 2 cajitas y podríamos comprar $n + 1$ nuggets.

Segunda forma:

- **Caso Base:** ($n = 8, 9, 10$)

Si quiero comprar 8 nuggets de manera exacta, puedo comprar una bolsa y una cajita.

Si quiero comprar 9 nuggets de manera exacta, puedo comprar tres bolsas.

Si quiero comprar 10 nuggets de manera exacta, puedo comprar dos cajitas.

- **Hipotesis Inductiva:**

$\forall n \geq 8$ se pueden comprar n nuggets de manera exacta.

- **Paso Inductivo**

Probémoslo para el caso $n + 1$. Por Hipótesis inductiva sabemos que podemos comprar $n - 2$ nuggets de manera exacta, agregando una cajita podemos comprar $n + 1$ nuggets de manera exacta.

Obs: Notemos que en la segunda forma necesitamos más casos bases, pues necesitamos retroceder 3 pasos (desde $n + 1$ a $n - 2$), luego nos gustaría empezar a probar desde el caso $n = 11$. En la primera forma era necesario sólo un caso base pues sólo miramos el caso anterior.