MA1101-2 Introducción al Álgebra
Profesor: José Soto
Auxiliares: Arturo Merino, Nicolás Zalduendo

Auxiliar 4 : Funciones I

26 de septiembre del 2016

P1. [Varios]

a) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función *isométrica*, es decir, una función tal que:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \qquad |f(x) - f(y)| = |x - y|$$

Demuestre que f es inyectiva.

b) Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función *estrictamente monótona*, es decir, una función tal que:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \qquad x < y \implies g(x) < g(y)$$

Demuestre que g es inyectiva. Demuestre mediante un contraejemplo que g no necesariamente es sobreyectiva.

c) Sea $h : (\mathbb{R} \setminus \{-1\}) \to \mathbb{R}$ definidas por:

$$h(x) = \frac{2x}{x+1}$$

Demuestre que h es inyectiva, pero no es sobreyectiva.

d) Sea $\varphi : \mathcal{P}(\mathcal{U}) \to \mathcal{P}(\mathcal{U})$ una función definida por $\varphi(X) = X^c$. Demuestre que φ es biyectiva y encuentre φ^{-1}.

Solución 1.

a) Para probar inyectividad, consideremos $x, y \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = f(y)$. Luego,

$$0 = |f(x) - f(y)| = |x = y|$$

de donde concluimos que $x = y$, probando la inyectividad.

b) Para esta parte consideremos $x, y \in \mathbb{R}$ con $x \neq y$, y probemos que $g(x) \neq g(y)$. En efecto, como $x \neq y$ necesariamente uno será mayor que el otro. Asumamos, por ejemplo, que $x < y$. Luego,

$$x < y \Rightarrow g(x) < g(y)$$

Como $g(x) < g(y)$, en particular $g(x) \neq g(y)$, concluyendo lo pedido. El caso $y < x$ es análogo.

c)
- **Inyectividad:** Sean $a, b \in (\mathbb{R} \setminus \{-1\})$ tal que $g(a) = g(b)$. Luego:

$$\begin{array}{rcl} g(a) & = & g(b) \\ \frac{2a}{a+1} & = & \frac{2b}{b+1} \\ 2a(b+1) & = & 2b(a+1) \\ 2ab + 2a & = & 2ba + 2b \\ 2a & = & 2b \\ a & = & b \end{array}$$

Por tanto g es inyectiva.

- **No sobreyectividad:** Supongamos en busca de una contradicción que todo $y \in \mathbb{R}$ se puede escribir como $y = g(a)$. Luego:

$$\begin{array}{rcl} y & = & g(a) \\ y & = & \frac{2a}{a+1} \\ ya + y & = & 2a \\ y & = & a(2-y) \end{array}$$

Notemos que la expresión anterior es valida $\forall y \in \mathbb{R}$, en particular para $y = 2$. Reemplazando:

$$2 = a \cdot 0 = 0$$

Lo que es una contradicción.

d)
- **Inyectividad**: Sean $X, Y \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$ tal que $\varphi(X) = \varphi(Y)$. En efecto:

$$\begin{array}{rcl} \varphi(X) & = & \varphi(Y) \\ X^c & = & Y^c \\ X & = & Y \end{array}$$

concluyendo la inyectividad.

- **Sobreyectividad**: Sea $Y \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$. Queremos encontrar $X \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$ tal que $\varphi(X) = Y$. Si tomamos como candidato a $X = Y^c$, notamos que:

$$\varphi(X) = \varphi(Y^c) = (Y^c)^c = Y$$

Como esto es valido $\forall Y \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$, se concluye que φ es sobreyectiva, y luego es biyectiva.

- **Inversa** Tomamos como candidato a inversa a φ, es decir, la función es su propia inversa pues notamos que

$$\varphi(Y) = Y^c = X \Leftrightarrow \varphi(X) = X^c = Y$$

,
cumpliendo la definición de inversa.

P2. [Funciones sobre funciones]

a) Considere las funciones $f, g : A \longrightarrow B$ con $A, B \neq \emptyset$ y f inyectiva. Se define $\varphi : A \longrightarrow B \times B$ como $\varphi(x) = (f(x), g(x))$, para cada $x \in A$. Demuestre que φ es inyectiva.

b) Sea $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | (\exists a \in R)(\forall x \in \mathbb{R}) f(x) = ax^2\}$. Se define la función $\psi : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ como:

$$\psi(f) = f(2)$$

Muestre que ψ es biyectiva.

Solución 2.

a) Sea $x, y \in A$ con $x \neq y$. Demostraremos que $\varphi(x) \neq \varphi(y)$. En efecto como $x \neq y$ y f es inyectiva, entonces $f(x) \neq f(y)$, luego es claro que $(f(x), g(x)) \neq (f(y), g(y))$ (pues difieren en la primera coordenada) y por tanto $\varphi(x) \neq \varphi(y)$.

b) Mostremos que ψ es inyectiva y sobreyectiva.

- **Inyectividad:** Sean $g_1, g_2 \in \mathcal{F}$ tal que $\psi(g_1) = \psi(g_2)$, por ende $g_1(2) = g_2(2)$ y más aún $a_1 2^2 = a_2 2^2$. Notemos que como $a_1 = a_2$, entonces $g_1 = g_2$. Con esto concluimos que $\psi(g_1) = \psi(g_2) \implies g_1 = g_2$ y por tanto que ψ es inyectiva.
- **Sobreyectividad:** Sea ahora $r \in \mathbb{R}$ debemos mostrar que existe $g \in \mathcal{F}$ tal que $\psi(g) = r$, notemos que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$g(x) = \frac{r}{4}x^2$$

es tal que $\psi(g) = r$. Por tanto ψ es sobreyectiva.

P3. [Funciones sobre conjuntos]

a) Sea $\mathcal{U} \neq \emptyset$ un conjunto universo. Se define la función $f : \mathcal{P}(\mathcal{U}) \times \mathcal{P}(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{U})$ por $f(X,Y) = X \backslash Y$ para cada $(X,Y) \in \mathcal{P}(\mathcal{U}) \times \mathcal{P}(\mathcal{U})$. Estudie la inyectividad y sobreyectividad de f.

b) Sean A, B dos conjuntos fijos cualquiera. Definimos $\mathcal{F} : \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A \cup B)$ como:

$$F(X,Y) = X \cup Y$$

(i) Demuestre que F es sobreyectiva.

(ii) Suponga que $A \cap B = \emptyset$. Demuestre que F es inyectiva.

(iii) Bajo la hipótesis $A \cap B = \emptyset$ encuentre F^{-1}.

Solución 3.

a)
- **No Inyectividad**: Notemos que la función no es inyectiva, pues dados dos conjuntos $X, Y \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$ con $X \neq Y$, basta tomar $(X,X),(Y,Y) \in \mathcal{P}(\mathcal{U}) \times \mathcal{P}(\mathcal{U})$, de donde se obtiene que

$$f(X,X) = X \backslash X = \emptyset = Y \backslash Y = f(Y,Y)$$

  por lo que f no puede ser inyectiva.
- **Sobreyectividad**: Queremos, dado $Y \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$, encontrar un elemento en $\mathcal{P}(\mathcal{U}) \times \mathcal{P}(\mathcal{U})$ cuya imagen sea Y. En efecto, notemos que podemos tomar, por ejemplo $(Y, \emptyset) \in \mathcal{P}(\mathcal{U}) \times \mathcal{P}(\mathcal{U})$ que cumple

$$f(Y,\emptyset) = Y \backslash \emptyset = Y$$

  Por lo tanto la función es sobreyectiva.

b) (i) Sea $Z \in \mathcal{P}(A \cup B)$ queremos encontrar un $(X,Y) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ tal que $F(X,Y) = Z$. Tomemos $(X,Y) = (Z \cap A, Z \cap B)$, veamos que se verifica $F(X,Y) = Z$

$$F(X,Y) = F(Z \cap A, Z \cap B) = (Z \cap A) \cup (Z \cap B) = Z \cap (A \cup B) = Z$$

Donde la última igualdad se verifica pues $Z \subseteq A \cup B$.

(ii) Sean (X_1, Y_1) y (X_2, Y_2) tal que $F(X_1, Y_1) = F(X_2, Y_2)$ queremos probar que F es inyectiva (es decir que $(X_1, Y_1) = (X_2, Y_2)$). Veamos que esto pasa:

$$\begin{gathered} F(X_1, Y_1) = F(X_2, Y_2) \\ X_1 \cup Y_1 = X_2 \cup Y_2 \\ (X_1 \cup Y_1) \cap A = (X_2 \cup Y_2) \cap A \\ (X_1 \cap A) \cup (Y_1 \cap A) = (X_2 \cap A) \cup (Y_2 \cap A) \end{gathered}$$

Como $X_1, X_2 \subseteq A$, entonces $X_1 \cap A = X_1$ y $X_2 \cap A = X_2$. Además como $A \cap B = \emptyset$, $Y_1 \subseteq B$ y $Y_2 \subseteq B$ tenemos que $Y_1 \cap A = \emptyset$ e $Y_2 \cap A = \emptyset$. Aplicando todo esto a la ecuación anterior concluimos que:

$$X_1 \cup \emptyset = X_2 \cup \emptyset \implies X_1 = X_2$$

Veamos que pasa cuando intersectamos con B:

$$\begin{gathered} (X_1 \cup Y_1) \cap B = (X_2 \cup Y_2) \cap B \\ (X_1 \cap B) \cup (Y_1 \cap B) = (X_2 \cap B) \cup (Y_2 \cap B) \end{gathered}$$

De manera análoga a lo anterior como $Y_1, Y_2 \subseteq B$, entonces $Y_1 \cap B = Y_1$ y $Y_2 \cap B = Y_2$. Además como $A \cap B = \emptyset$, $X_1, X_2 \subseteq B$ tenemos que $X_1 \cap B = \emptyset$ y $X_2 \cap B = \emptyset$. Aplicando todo esto a la ecuación anterior concluimos que:

$$\emptyset \cup Y_1 = \emptyset \cup Y_2 \implies Y_1 = Y_2$$

(iii) De las partes anteriores sabemos que la función F es biyectiva bajo la condición $A \cap B\emptyset$. Nuestro candidato a inversa será $F^{-1}(Z) = (Z \cap A, Z \cap B)$ (esto viene de la demostración de sobreyectividad), notemos que:

$$F^{-1}(Z) = (Z \cap A, Z \cap B) \iff F(Z \cap A, Z \cap B) = Z$$

De esto vemos que F^{-1} es la inversa de F

P4. [Una función aditiva]

Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una que $\forall n, m$ satisface:

$$f(n+m) = f(n) + f(m)$$

Demuestre que:

a) $f(0) = 0$.

b) $f(mn) = mf(n) \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$.

c) f es inyectiva si y sólo si:

$$f(x) = 0 \implies x = 0$$

d) f es biyectiva si y sólo si $f(n) = n$.

Obs : Esto último implica que la única función aditiva y biyectiva de $\mathbb{N}$ *en* $\mathbb{N}$ *es la identidad.*

Solución 4.

a) Como la función es aditiva, se tiene:

$$\begin{array}{rcl} f(n+0) & = & f(n) + f(0) \\ f(n) & = & f(n) + f(0) \\ 0 & = & f(0) \end{array}$$

b) Nuevamente de la aditividad tenemos:

$$\begin{array}{rcl} f(mn) & = & f(\underbrace{n+n+\cdots+n}_{m \text{ veces}}) \\ & = & f(n) + f(\underbrace{n+n+\cdots+n}_{m-1 \text{ veces}}) \\ & = & f(n) + f(n) + f(\underbrace{n+n+\cdots+n}_{m-2 \text{ veces}}) \\ & \vdots & \\ & = & \underbrace{f(n) + f(n) + \ldots f(n)}_{m \text{ veces}} \\ & = & mf(n) \end{array}$$

c)
- ($\implies$)
  Sea x tal que $f(x) = 0$, demostremos que $x = 0$. Por la parte *a*) sabemos que $f(0) = 0$, luego tenemos que $f(x) = f(0)$. Utilizando la hipótesis de que f es inyectiva tenemos que $f(x) = f(0)$ implica que $x = 0$. De esto concluimos que:
  $$f(x) = 0 \implies x = 0$$
  que era lo pedido.
- ($\impliedby$)
  Supongamos ahora que $f(z) = 0 \implies z = 0$, queremos probar que f es inyectiva. Sean $x, y \in \mathbb{N}$ tal que $f(x) = f(y)$, luego:
  $$\begin{array}{rcll} f(x) & = & f(y) & \\ f(x \cdot 1) & = & f(y \cdot 1) & \text{/parte b)} \\ xf(1) & = & yf(1) & \end{array}$$
  Notemos que la hipótesis nos dice que $z \neq 0 \implies f(z) \neq 0$, es decir nos dice que $f(1) \neq 0$. Luego podemos divir por $f(1)$, es decir:
  $$xf(1) = yf(1) \implies x = y$$
  De donde se concluye la inyectividad de f.

d) Demostremos ambas implicancias.

($\Longleftarrow$) Demostremos que $f(n) = n$ es biyectiva. Es claro que esta es sobreyectiva, veamos la inyectividad. Sean x, y tales que $f(x) = f(y)$, luego:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(y) \\ x &= y \end{aligned}$$

Por tanto f es biyectiva.

($\Longrightarrow$) Notemos que si lograramos demostrar que $f(1) = 1$ entonces, por la propiedad demostrada en *b*) concluiriamos que $f(n) = n$, mostremos entonces que $f(1) = 1$. Como f es sobreyectiva, existe $x \in \mathbb{N}$ tal que $f(x) = 1$, por inyectividad sabemos que $x \neq 0$, luego:

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 \\ f(1) &= \tfrac{1}{x} \end{aligned}$$

Como $f(1)$ es un natural, tenemos que $x = 1$, por ende $f(1) = 1$.