MA1101-2 Introducción al Álgebra
Profesor: José Soto
Auxiliares: Arturo Merino, Nicolás Zalduendo

Auxiliar 16 : Polinomios II

15 de diciembre del 2016

Recordemos:

- **Teorema del Resto:** Sea $p \in \mathbb{K}[x]$ y $c \in \mathbb{K}$. El resto de dividir p por el polinomio $(x-c)$ es $p(c)$.
- Diremos que $c \in \mathbb{K}$ es una raíz de $p \in \mathbb{K}[x]$ si $p(c) = 0$.
- Si $c_1, c_2, \ldots, c_k$ son raíces distintas de p, entonces:
$$(x-c_1)(x-c_2)\ldots(x-c_k)|p(x)$$
- Sea $n \geq 1$. Si $p \in \mathbb{K}[x]$ es tal que $\text{gr}(p) = n$, entonces p posee a lo más n raíces distintas.
- Sea $n \geq 1$ y $p, q \in \mathbb{K}[x]$ tales que $\text{gr}(p) \leq n$ y $\text{gr}(q) \leq n$. Si p y q coinciden en $n+1$ puntos distintos, entonces son iguales.
- **Teorema Fundamental del Álgebra:** Sea $p \in \mathbb{C}[x]$ tal que $\text{gr}(p) = n \geq 1$. Entonces p posee al menos una raíz en $\mathbb{C}$.
- Sea $p \in \mathbb{C}[x]$ tal que $\text{gr}(p) = n \geq 1$. Entonces existen $\alpha, c_1, \ldots c_m \in \mathbb{C}$ y $l_1, \cdots l_m \in \mathbb{N}$ tales que:
$$p(x) = \alpha(x-c_1)^{l_1}\ldots(x-c_m)^{l_m}$$
- Sea $p \in \mathbb{C}[x]$ con coeficientes en $\mathbb{R}$ y sea $z \in \mathbb{C}$ una raiz de p. Entonces $\overline{z}$ es una raiz de p.
- Sea $p \in \mathbb{R}[x]$, tal que $\text{gr}(p) = n \geq 1$. Entonces existen valores $\alpha, c_1, \ldots, c_m, a_1, b_1, \ldots, a_s, b_s \in \mathbb{R}$ tales que:
$$p \equiv \alpha(x-c_1)\ldots(x-c_m)(x^2+a_1x+b_1)\ldots(x^2+a_sx+b_s)$$
- **Teorema de la Raíz Racional:** Sea $p \in \mathbb{R}[x]$, con coeficientes en $\mathbb{Z}$. Si r y s son primos relativos tal que $\frac{r}{s}$ es una raíz de p, entonces:
$$r|a_0 \quad \wedge \quad s|a_n$$
- Sea $p \in \mathbb{R}[x]$ mónico con coeficientes en $\mathbb{Z}$. Entonces toda raíz racional de p es entera y divide a a_0.
- El algoritmo de Ruffini permite dividir un polinomio p por $x-c$.

P1. [Varios]

a) Sea p un polinomio con coeficientes reales tal que $p \not\equiv 0$ tal que $i, 1, 2, 3$ son raíces de p. De el grado mínimo del polinomio y suponiendo que p es del grado mínimo y mónico encuentrelo.

b) Factorice en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$ el polinomio $p(x) = x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 13x - 15$

c) Sea $n_0, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, definamos:
$$p(x) = x^{3n_0} + x^{3n_1+1} + x^{3n_2+2}$$
Demuestre que $p(x)$ es divisible por $q(x) = x^2 + x + 1$.

P2. [Funciones de polinomios]

Sea $F : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$, definida para todo polinomio $p \in \mathbb{R}[x]$ de la forma $p(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ como:
$$F(p) = \sum_{k=0}^{n} a_k$$
Es decir, F es la función que a todo polinomio le asocia la suma de sus coeficientes.

a) Estudie inyectividad y sobreyectividad de F.

b) Sea $p \in \mathbb{R}[x]$ tal que $F(p) = 0$. Encuentre $x \in \mathbb{R}$ tal que $p(x) = 0$.

P3. [Encontrar un polinomio]
Sea $p(x) \in \mathbb{R}(x)$ un polinomio mónico con $\mathrm{gr}(p) = 3$. Se sabe que $p(x)$ es divisible por $(x-1)$ y que los restos de sus divisones por $(x-2)$, $(x-3)$ y $(x-4)$ son iguales. Determine $p(x)$, justificando sus pasos, y encuentre todas sus raíces.

P4. [Factorización y Morfismo]

a) Sea $p(x) = x^5 - 5x^4 + 14x^3 - 14x^2 + 13x - 9$. Se sabe que una de las raíces de $p(x)$ es $x = i$. Calcule todas las raíces de p y factorícelo en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$.

b) Sea $a \in \mathbb{R}$. Se define $\varphi : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$ por:
$$\varphi(p(x)) = p(a)$$

(i) Demuestre que φ es un morfismo epiyectivo entre los anillos $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ y $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

(ii) Pruebe que $\varphi^{-1}(\{0\}) = \{(x-a)q(x) : q(x) \in \mathbb{R}[x]\}$.

P5. [Correspondencia en Polinomios]
Sea $p \in \mathbb{C}[x]$.

a) Demuestre que $p(x)$ es sobreyectivo, si y sólo si $\mathrm{gr}(p) \geq 1$.
Hint : Puede ser útil el teorema fundamental del álgebra.

b) El objetivo de esta parte es probar que $p(x)$ es inyectivo, si y sólo si $\mathrm{gr}(p) = 1$.

(i) Demuestre que si $\mathrm{gr}(p) = 1$, entonces $p(x)$ es inyectivo.

(ii) Demuestre que si $\mathrm{gr}(p) < 1$, entonces $p(x)$ no es inyectivo.

(iii) Sea $n > 1$, $\lambda, a \in \mathbb{C}$. Definamos $q \in \mathbb{C}[x]$ como:
$$q(x) = \lambda(x-a)^n$$
Demuestre que $q(x)$ no es inyectivo.

(iv) Concluya la dirección que falta.