

MA1101-2 Introducción al Álgebra

Profesor: José Soto

Auxiliares: Arturo Merino, Nicolás Zalduen-
do

Auxiliar 13 : Anillos, Cuerpos y Complejos

28 de Noviembre del 2016

Recordemos:

- Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo. Si $x, y \in A \setminus \{0\}$ son tales que $x \cdot y = 0$, diremos que x e y son divisores del 0.

- Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo y $a \in A \setminus \{0\}$, luego:

a es divisor del 0 $\iff a$ no es cancelable

- Sea $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ un anillo conmutativo con unidad tal que todo $x \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ es invertible, diremos que $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ es un cuerpo.

- De manera equivalente $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ es un cuerpo si y sólo si:

- $(\mathbb{K}, +)$ es un grupo abeliano.
- $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$ es un grupo abeliano.
- $\cdot$ distribuye con respecto a $+$.

- $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ y $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ son cuerpos.

- Un cuerpo no tiene divisores del 0.

- Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo conmutativo con unidad tal que $|A|$ es finito. Entonces $(A, +, \cdot)$ no tiene divisores del cero si y sólo si $(A, +, \cdot)$ es un cuerpo.

- $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ es un cuerpo $\iff n$ es un primo.

- Sea $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ dotado de las siguientes operaciones:

$$\begin{aligned} z + w &= (z_1 + w_1, z_2 + w_2) \\ z \cdot w &= (z_1 w_1 - z_2 w_2, z_1 w_2 + w_1 z_2) \end{aligned}$$

- $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ es un cuerpo.

- Sea $R = \{(z_1, 0) \in \mathbb{C} : z_1 \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{C}$, entonces $(R, +, \cdot) \cong (\mathbb{R}, +, \cdot)$.

- Usualmente anotaremos los $(a, b) \in \mathbb{C}$ como $a + bi$. Donde además $i^2 = -1$.

- Sea $z = a + bi \in \mathbb{C}$. Definimos la parte real y la parte imaginaria respectivamente como:

$$\operatorname{Re}(z) = a \quad \operatorname{Im}(z) = b$$

- Sean $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces:

- $\operatorname{Re}(z_1 + z_2) = \operatorname{Re}(z_1) + \operatorname{Re}(z_2)$.
- $\operatorname{Im}(z_1 + z_2) = \operatorname{Im}(z_1) + \operatorname{Im}(z_2)$.
- $\operatorname{Re}(\lambda z) = \lambda \operatorname{Re}(z)$.
- $\operatorname{Im}(\lambda z) = \lambda \operatorname{Im}(z)$.
- $z_1 = z_2 \iff [\operatorname{Re}(z_1) = \operatorname{Re}(z_2) \wedge \operatorname{Im}(z_1) = \operatorname{Im}(z_2)]$

- Sea $z = a + bi \in \mathbb{C}$. Definimos el conjugado de z como:

$$\bar{z} = a - bi$$

- Sean $z, w \in \mathbb{C}$. Entonces:

- $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$ y $\overline{z - w} = \bar{z} - \bar{w}$.
- $\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$. Si $w \neq 0$ $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$.
- Si $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\overline{\lambda z} = \lambda \bar{z}$.
- $\overline{\bar{z}} = z$.
- $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(\bar{z})$ y $\operatorname{Im}(z) = -\operatorname{Im}(\bar{z})$.
- $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ y $\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$
- $z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}$.

- Sea $z = a + bi$. Definimos el módulo como:

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

- Sean $z, w \in \mathbb{C}$. Entonces:

- $|z| = |\bar{z}|$ y $z = 0 \iff |z| = 0$.
- $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ y $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$.
- $|zw| = |z||w|$ y $|z + w| \leq |z| + |w|$.
- Si $z \neq 0$, entonces $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.
- Si $w \neq 0$, entonces $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$.

P1. [Divisores del Cero]

Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo conmutativo.

- Si $a \in A$ es un divisor del cero y $b \in A$ cualquiera, demuestre que si $a \cdot b \neq 0$, entonces $a \cdot b$ es un divisor del cero.
- Demuestre que si el producto de dos elementos de A es un divisor de cero, entonces al menos uno de ellos es un divisor de cero.

P2. [Producto de Cuerpos]

Sea $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ un cuerpo. Definimos las siguientes operaciones sobre $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$:

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d) \quad (a, b) \odot (c, d) = (a \cdot c, b \cdot d)$$

Se sabe (no lo demuestre) que $(\mathbb{K} \times \mathbb{K}, \oplus, \odot)$ es un anillo conmutativo con unidad.

- Encuentre el neutro para $\oplus$ y el neutro para $\odot$.
- Demuestre que $\forall (a, b) \in (\mathbb{K} \times \mathbb{K}) \setminus \{0_{\mathbb{K} \times \mathbb{K}}\}$:

$$(a, b) \text{ es divisor del } 0 \iff (a, b) \text{ no es invertible}$$

- ¿Es $(\mathbb{K} \times \mathbb{K}, \oplus, \odot)$ un cuerpo? Argumente.

P3. [Casquete unitario]

- Demuestre que:

$$S = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

Es un subgrupo de $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$

- Para $z \in S$ y $z \neq 1$ definimos:

$$w = \frac{1+z}{1-z}$$

Demuestre que w es un imaginario puro, es decir que $\operatorname{Re}(w) = 0$.

- Sea $z \in S$ y $z \neq -1$. Demuestre que:

$$\frac{1+z}{1+\bar{z}} = z$$

- Sea $z \in S$, y $z \neq -1$. Calcule:

$$\operatorname{Im} \left(\frac{z}{(1+z)^2} \right)$$

P4. [Forma Cartesiana]

- Expresa de la forma $a + bi$ los siguientes complejos:

$$(1-i)^4(1+i)^4 \quad 1+i + \frac{i-1}{|i-1|^2+i} \quad \frac{(1+i)^{2016}}{(1-i)^{2016}}$$

- Pruebe que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$(1+i)^n + (1-i)^n \in \mathbb{R}$$

- Sean $M, N \in \mathbb{N}$ tal que existen $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ que verifican $M = a^2 + b^2$ y $N = c^2 + d^2$. Demuestre que existen $p, q \in \mathbb{N}$ tal que $MN = p^2 + q^2$. En otras palabras, piden probar que si dos enteros se pueden escribir como la suma de dos cuadrados, entonces su producto también.

Hint: Le puede ser útil trabajar la siguiente expresión $|(a+ib)(c+id)|^2$.