MA1101-2 Introducción al Álgebra
Profesor: José Soto
Auxiliar: Arturo Merino, Nicolás Zalduendo

Auxiliar 9 : Teorema del Binomio y Sumas Dobles

03 de Noviembre del 2016

Recordemos:

- Definimos el factorial de n por la siguiente recurrencia:
$$n! = n(n-1)! \qquad 0! = 1$$
De manera más informal:
$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$
También puede ser definido como las manera de permutar un conjunto de n elementos.
- Definimos el número binomial $\binom{n}{k}$ como el número de subconjuntos de tamaño k que posee un conjunto de tamaño n. Si $k \leq n$, entonces:
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$
- Identidad de Pascal:
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$
- Teorema del Binomio: Sean $x, y \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Entonces:
$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$
- Si tenemos una suma doble cuyos limites inferiores y superiores no dependen de los indices. Entonces:
$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_{kj} = \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} a_{kj}$$

P1. [Varios]
Calcule las siguientes sumatorias sin utilizar inducción

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-2} \frac{k(k-1)7^k}{n}\binom{n}{k}$

c) Dado $p \in \mathbb{R}$:
$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = pn, \quad \forall\, n \geq 1.$$

P2. [Sumas multiples]

a) Sea $b \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$. Calcule la siguiente suma:
$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \binom{i}{j} b^i$$

b) Calcule:
$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} \frac{8^{k+1}}{3^j}$$

P3. [P1 Control 4, Año 2013]

a) Demuestre, sin usar inducción, que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=3}^{n+3} (-1)^{k-3}(k-2)\binom{n+3}{k} = n+1$$

b) Considere, para $n \in \mathbb{N}$, la suma

$$S \;=\; 1 \;+\; \frac{1+2}{3} \;+\; \frac{1+2+3}{3} \;+\; \ldots \;+\; \frac{1+2+3+\ldots+n}{n}$$

Escriba S como una sumatoria doble y calcule su valor.

P4. [P2 (a) Control 4 y P2 (b) Control Recuperativo, Año 2012]

a) Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$. Calcule

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{j}\left(k + \frac{2^j}{j}\right).$$

b) Demuestre sin usar inducción que

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{n} k\binom{n}{k}\binom{n}{j}a^{k+j-1} = n(1+a)^{2n-1}$$

P5. [Intercambio de sumas]

Demuestre que

$$\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=j}^{n-1}\binom{i}{j}2^{i+j}3^{i-j} = \frac{10^n-1}{9}$$

Hint: Para demostrar lo anterior debe intercambiar las sumas. Para ello defina la cantidad

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & \textit{si } 0 \leq j \leq i \leq n-1 \\ 0 & \textit{si no} \end{cases}$$

para $i \in \{0,\ldots,n-1\}$, $j \in \{0,\ldots,n-1\}$ *y úsela en forma adecuada.*