MA1101-2 Introducción al Álgebra
Profesor: José Soto
Auxiliar: Arturo Merino, Nicolás Zalduendo

Auxiliar 5 : Funciones II

3 de octubre del 2016

Recordemos:

- Sea f biyectiva. Definimos f^{-1} como:
$$[\forall x \in A][\forall y \in B][f(x) = y \iff f^{-1}(y) = x]$$
- Sea $f : A \to B$ y $g : B \to C$ definimos la función composición $(g \circ f) : A \to C$ como:
$$(g \circ f)(a) = g(f(a))$$
- Sea $f : A \to B$, $g : B \to C$ y $h : C \to D$, entonces:
  1. $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$
  2. $I_B \circ f = f \circ I_A = f$, donde I_X es la función identidad del conjunto X.
  3. Si f es biyectiva, entonces $f \circ f^{-1} = I_B$ y $f^{-1} \circ f = I_A$.
- Sea $f : A \to B$ y $g : B \to C$, entonces:
  1. Si f y g son inyectivas, entonces $(g \circ f)$ es inyectiva.
  2. Si f y g son sobreyectivas, entonces $(g \circ f)$ es sobreyectiva.
  3. Si f y g son biyectiva, entonces $(g \circ f)$ es biyectiva.
  4. Si $(g \circ f)$ es inyectiva, entonces f es inyectiva.
  5. Si $(g \circ f)$ es sobreyectiva, entonces g es sobreyectiva.
- Sea $f : A \to B$ biyectiva y sea $g : B \to A$
  1. Si $g \circ f = I_A$, entonces $g = f^{-1}$
  2. Si $f \circ g = I_B$, entonces $g = f^{-1}$.
- Sean $f : A \to B$ y $g : B \to A$ tales que:
$$g \circ f = I_A \qquad f \circ g = I_B$$
Entonces f y g son biyectivas y $f^{-1} = g$.
- Sea $f : A \to B$, $g : B \to A$ biyectivas, entonces:
$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$
- Sea $f : A \to B$ y $X \subseteq A$, definimos:
$$f(X) = \{b \in B : \exists x \in X, f(x) = b\}$$
- Sea $f : A \to B$ y $X \subseteq B$, definimos:
$$f^{-1}(X) = \{a \in A : f(a) \in X\}$$

P1. [Propiedades de la imagen y la preimagen]
Sea $f : E \to F$ y $g : F \to G$ funciones (no necesariamente biyectivas).

a) Probar que:
$$(\forall A, B \subseteq E)[f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)] \iff f \text{ es inyectiva}$$

b) Sea $A \subseteq G$. Probar que:
$$(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$$

c) Sea $B \subseteq F$. Probar que:
$$f(f^{-1}(B)) = B \cap f(E)$$

P2. [Encontrando preimagenes e imagenes]

Sea $U \neq \emptyset$ un conjunto universo. Se define la función $f : \mathcal{P}(U) \times \mathcal{P}(U) \longrightarrow \mathcal{P}(U)$ por

$$f(X,Y) = X \backslash Y$$

a) Demuestre que $f^{-1}(\{U, \emptyset\}) = \{U, \emptyset\} \cup \{(X,Y) \in \mathcal{P}(U) \times \mathcal{P}(U) : X \subseteq Y\}$.

b) Determine, justificando su respuesta, el conjunto $f(D)$ (imagen de D), en donde

$$D = \{(X,X) \in \mathcal{P}(U) \times \mathcal{P}(U) : X \in \mathcal{P}(U)\}$$

P3. [Inversas por la izquierda y por la derecha]

En general, representamos la *función identidad* de un conjunto C por I_C. Es decir definimos $I_C : C \to C$ como:

$$I_C(x) = x$$

Dada $f : A \to B$, decimos que una función $g_I : B \to A$ es una *inversa por la izquierda* de f si:

$$g_I \circ f = I_A$$

, y decimos que $g_D : B \to A$ es una *inversa por la derecha* de f si:

$$f \circ g_D = I_B$$

a) Demuestre que si f tiene una inversa por la izquierda, entonces f es inyectiva.

b) Demuestre que si f tiene una inversa por la derecha, entonces f es sobreyectiva.

c) Demuestre que si f tiene tanto una inversa por la izquierda g_I como una inversa por la derecha g_D, entonces f es biyectiva y $g_I = g_D = f^{-1}$

P4. [Funciones sobre conjuntos]

Sea $\mathcal{F} = \{f : [0,1] \longrightarrow [0,1] / f \text{ función}\}$ y $\mathcal{B} = \{f : [0,1] \longrightarrow [0,1] / f \text{ función biyectiva}\}$. Se definen así las funciones $\Phi : \mathcal{F} \to [0,1]$ y $\mathcal{I} : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ dadas por:

$$\Phi(f) = \frac{f(0) + f(1)}{2}, \quad \mathcal{I}(f) = f^{-1}$$

a) Demuestre que Φ está bien definida, es decir, verifique que $(\forall f \in \mathcal{F}), \Phi(f) \in [0,1]$.

b) Estudie inyectividad y sobreyectividad de Φ.

c) Pruebe que $\mathcal{I}(f \circ g) = \mathcal{I}(g) \circ \mathcal{I}(f)$.

d) Pruebe que $\mathcal{I}$ es biyectiva.

e) Demuestre que $(\Phi \circ \mathcal{I})^{-1}(\{0\}) = \emptyset$ (preimagen del conjunto $\{0\}$).