MA1101-2 Introducción al Álgebra
Profesor: José Soto
Auxiliares: Arturo Merino, Nicolás Zalduendo

Pauta 16 : Polinomios II

15 de diciembre del 2016

P1. [Varios]

a) Sea p un polinomio con coeficientes reales tal que $p \not\equiv 0$ tal que $i, 1, 2, 3$ son raíces de p. De el grado mínimo del polinomio y suponiendo que p es del grado mínimo y mónico encuentrelo.

b) Factorice en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$ el polinomio $p(x) = x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 13x - 15$

c) Sea $n_0, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, definamos:

$$p(x) = x^{3n_0} + x^{3n_1+1} + x^{3n_2+2}$$

Demuestre que $p(x)$ es divisible por $q(x) = x^2 + x + 1$.

Solución 1.

a) Notemos que como i es raíz entonces $\bar{i} = -i$ también lo es. Por ende el polinomio tiene por lo menos 5 raices $(i, -i, 1, 2, 3)$ y por tanto el grado de p debe ser mayor a 5. Como el polinomio debe tener lo anterior como raíces, tenemos que:

$$p(x) = (x-i)(x+i)(x-1)(x-2)(x-3) = x^5 - 6x^4 + 12x^3 - 12x^2 + 11x - 6$$

Satisface lo pedido.

b) Por el teorema de la raíz racional sabemos que si $r = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ es una raíz entonces $a| - 15$ y $b|1$, luego las posibles raíces racionales son:

$$\{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15\}$$

Veamos si encontramos alguna:

$$\begin{array}{rcl} p(1) & = & (1)^4 + 3(1)^3 - 12(1)^2 - 13(1) - 15 = -36 \\ p(-1) & = & (-1)^4 + 3(-1)^3 - 12(-1)^2 - 13(-1) - 15 = -16 \\ p(3) & = & (3)^4 + 3(3)^3 - 12(3)^2 - 13(3) - 15 = 0 \end{array}$$

Es decir 3 es raíz, luego $(x-3)|p(x)$. Dividiendo polinomios:

$$\begin{array}{l} \big(\ x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 13x - 15\big) : \big(x - 3\big) = x^3 + 6x^2 + 6x + 5 \\ \underline{-x^4 + 3x^3} \\ \qquad 6x^3 - 12x^2 \\ \qquad \underline{-6x^3 + 18x^2} \\ \qquad\qquad 6x^2 - 13x \\ \qquad\qquad \underline{-6x^2 + 18x} \\ \qquad\qquad\qquad 5x - 15 \\ \qquad\qquad\qquad \underline{-5x + 15} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 \end{array}$$

Nuevamente por el teorema de la raíz racional las raíces racionales del polinomio resultante x^3+6x^2+6x+5, pueden ser:

$$\{\pm 1, \pm 5\}$$

Además sabemos que ± 1 no pueden ser raíces pues ya las probamos y no eran raices de p, probemos las que faltan:

$$\begin{aligned} q(5) &= (5)^3 + 6(5)^2 + 6(5) + 5 = 310 \\ q(-5) &= (-5)^3 + 6(-5)^2 + 6(-5) + 5 = 0 \end{aligned}$$

Es decir -5 es raíz, dividiendo polinomios:

$$\begin{array}{l} \big(\quad x^3 + 6x^2 + 6x + 5\big) : \big(x+5\big) = x^2 + x + 1 \\ \underline{-x^3 - 5x^2} \\ \qquad\quad x^2 + 6x \\ \qquad\ \underline{-x^2 - 5x} \\ \qquad\qquad\quad x + 5 \\ \qquad\qquad\ \underline{-x - 5} \\ \qquad\qquad\qquad 0 \end{array}$$

Para factorizar el polinomio resultante $x^2 + x + 1$, ocuparemos la formula cuadrática, de donde obtenemos que:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

Estamos listos para entregar la factorización de nuestro polinomio original. En $\mathbb{R}$:

$$p(x) = (x-3)(x+5)(x^2 + x + 1)$$

y en $\mathbb{C}$:

$$p(x) = (x-3)(x+5)\left(x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)\left(x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)$$

c) Demostraremos primero que las raíces de $x^2 + x + 1$ son raíces cúbicas de la unidad distintas de 1. En efecto:

$$x^2 + x + 1 = 0 \implies x^3 + x^2 + x = 0$$

Igualando estas dos ecuaciones tenemos:

$$x^2 + x + 1 = x^3 + x^2 + x \implies x^3 = 1$$

De donde concluimos que las soluciones son raíces cúbicas de la unidad. Supongamos que son 1, luego:

$$1^2 + 1 + 1 = 0 \implies 3 = 0$$

Lo que sería una contradicción. Sea entonces x_1 una raíz de $x^2 + x + 1$, luego:

$$\begin{aligned} p(x_1) &= x_1^{3n_0} + x_1^{3n_1+1} + x_1^{3n_2+2} \\ &= (x_1^3)^{n_0} + (x_1^3)^{n_1} x_1 + (x_1^3)^{n_2} x_1^2 \\ &= 1 + x_1 + x_1^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Es decir x_1 es raíz de $p(x)$, de manera análoga podemos concluir que la otra raíz de $x^2 + x + 1$, llamemosla x_2 es tambíen raíz de x_2. Por último como x_1, x_2 son raíces de $p(x)$, tenemos que $(x - x_1)(x - x_2) | p(x)$ o dicho de otra manera $(x^2 + x + 1) | p(x)$, que era lo pedido.

P2. [Funciones de polinomios]

Sea $F : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$, definida para todo polinomio $p \in \mathbb{R}[x]$ de la forma $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ como:

$$F(p) = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

Es decir, F es la función que a todo polinomio le asocia la suma de sus coeficientes.

a) Estudie inyectividad y sobreyectividad de F.

b) Sea $p \in \mathbb{R}[x]$ tal que $F(p) = 0$. Encuentre $x \in \mathbb{R}$ tal que $p(x) = 0$.

Solución 2.

a)
- **Inyectividad:**
  Notemos que $x \neq 1$, pero $F(x) = 1$ y $F(1) = 1$. Es decir F no es inyectiva.
- **Sobreyectividad:**
  Sea $y \in \mathbb{R}$ definamos el siguiente polinomio $p_y(x) = y$, luego:

  $$F(p_y) = y$$

  Es decir F es sobreyectiva.

b) Notemos que si $F(p) = 0$ para $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, entonces $\sum_{k=0}^{n} a_k = 0$. Luego:

$$p(1) = \sum_{k=0}^{n} a_k 1^k = \sum_{k=0}^{n} a_k = F(p) = 0$$

Es decir 1 es el x buscado.

P3. [Encontrar un polinomio]
Sea $p(x) \in \mathbb{R}(x)$ un polinomio mónico con $\text{gr}(p) = 3$. Se sabe que $p(x)$ es divisible por $(x-1)$ y que los restos de sus divisones por $(x-2)$, $(x-3)$ y $(x-4)$ son iguales. Determine $p(x)$, justificando sus pasos, y encuentre todas sus raíces.

Solución 3. Notemos que como $(x-1)|p(x)$:

$$p(x) = (x-1)q(x)$$

Donde como p es mónico $q(x) = x^2 + bx + c$. Luego:

$$p(x) = (x-1)(x^2 + bx + c)$$

Utilizando el teorema del resto, tenemos que $p(2) = p(3) = p(4)$. O de manera equivalente:

$$\begin{array}{rcl} p(2) & = & p(3) \\ p(3) & = & p(4) \end{array} \implies \begin{array}{rcl} 4 + 2b + c & = & 2(9 + 3b + c) \\ 2(9 + 3b + c) & = & 3(16 + 4b + c) \end{array} \implies \begin{array}{rcl} 4b + c & = & -14 \\ 6b + c & = & -30 \end{array}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones tenemos que $b = -8$ y $c = 18$. Por tanto:

$$p(x) = (x-1)(x^2 - 8x + 18) = x^3 - 9x^2 + 26x - 18$$

Nos falta encontrar las raíces. Es claro que $x_1 = 1$ es una raíz, para encontrar las otras usaremos la fórmula para la cuadrática sobre $x^2 - 8x + 18$, de donde tenemos que:

$$x_{2,3} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 18}}{2} \implies x_2 = 4 + i\sqrt{2}, \quad x_3 = 4 - i\sqrt{2}$$

P4. [Factorización y Morfismo]

a) Sea $p(x) = x^5 - 5x^4 + 14x^3 - 14x^2 + 13x - 9$. Se sabe que una de las raíces de $p(x)$ es $x = i$. Calcule todas las raíces de p y factorícelo en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$.

b) Sea $a \in \mathbb{R}$. Se define $\varphi : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$ por:

$$\varphi(p(x)) = p(a)$$

(i) Demuestre que φ es un morfismo epiyectivo entre los anillos $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ y $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

(ii) Pruebe que $\varphi^{-1}(\{0\}) = \{(x-a)q(x) : q(x) \in \mathbb{R}[x]\}$.

Solución 4.

a) Como i es raíz, sabemos que $\bar{i} = -i$ tambíen lo es, luego $(x-i)(x+i) = (x^2+1)$ divide a $p(x)$. Dividiendo polinomios tenemos que:

$$\begin{array}{l}
\big(\ x^5 - 5x^4 + 14x^3 - 14x^2 + 13x - 9\big) : \big(x^2+1\big) = x^3 - 5x^2 + 13x - 9 \\
\underline{-x^5 \qquad\quad -x^3} \\
\quad -5x^4 + 13x^3 - 14x^2 \\
\quad \underline{5x^4 \qquad\quad + 5x^2} \\
\qquad 13x^3 - 9x^2 + 13x \\
\qquad \underline{-13x^3 \qquad - 13x} \\
\qquad\qquad -9x^2 \qquad -9 \\
\qquad\qquad \underline{9x^2 \qquad +9} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Ocupando el teorema de la raíz racional sobre el polinomio resultante ($q(x) = x^3 - 5x^2 + 13x - 9$) sabemos que si $r = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ es raíz $a|9$ y $b|1$, por ende las posibles raíces racionales son:

$$\{\pm 1, \pm 3, \pm 9\}$$

Veamos si hay alguna:

$$q(1) \quad = \quad (1)^3 - 5(1)^2 + 13(1) - 9 = 0$$

Es decir 1 es raíz de q. Ocupando el algoritmo de Horner para dividir $q(x)$ por $x-1$, tenemos:

$$\begin{array}{l}
\big(\ x^3 - 5x^2 + 13x - 9\big) : \big(x-1\big) = x^2 - 4x + 9 \\
\underline{-x^3 \ + x^2} \\
\quad -4x^2 + 13x \\
\quad \underline{4x^2 \ - 4x} \\
\qquad\quad 9x - 9 \\
\qquad\quad \underline{-9x + 9} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

Por último solo queda factorizar $x^2 - 4x + 9$. Ocupando la fórmula cuadrática tenemos:

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-36}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{5}i}{2} = 2 \pm \sqrt{5}i$$

Hemos encontrado todas las raíces:

$$x_1 = 2 + \sqrt{5}i \quad x_2 = 2 - \sqrt{5}i \quad x_3 = 1 \quad x_4 = i \quad x_5 = -i$$

Su factorización en $\mathbb{R}$ es:

$$p(x) = (x^2 - 4x + 9)(x-1)(x^2+1)$$

Y la factorización en $\mathbb{C}$ es:

$$p(x) = (x - 2 - \sqrt{5}i)(x - 2 + \sqrt{5}i)(x-1)(x+i)(x-i)$$

(i) Verifiquemos primero que es morfismo para ambas operaciones:

$$\begin{aligned} \varphi((p+q)(x)) &= (p+q)(a) \\ &= p(a)+q(a) \\ &= \varphi(p(x))+\varphi(q(x)) \end{aligned}$$

Y además:

$$\begin{aligned} \varphi((pq)(x)) &= (pq)(a) \\ &= p(a)q(a) \\ &= \varphi(p(x))\varphi(q(x)) \end{aligned}$$

Veamos que es sobreyectiva. Sea $b \in \mathbb{R}$, queremos encontrar $p \in \mathbb{R}[x]$ tal que $\varphi(p(x)) = b$. Definamos $p_y(x) = y$, luego:

$$\varphi(p_y(x)) = p_y(a) = y$$

De donde concluimos el resultado.

(ii) Tenemos la siguiente cadena de equivalencias:

$$\begin{aligned} & p(x) \in \varphi^{-1}(\{0\}) \\ \iff & \varphi(p(x)) = p(a) = 0 \\ \iff & a \text{ es una raíz de } p(x) \\ \iff & (x-a) | p(x) \\ \iff & \text{Existe } q \in \mathbb{R}[x] \text{ tal que } p(x) = q(x)(x-a) \end{aligned}$$

De donde concluimos.

P5. [Correspondencia en Polinomios]
Sea $p \in \mathbb{C}[x]$.

a) Demuestre que $p(x)$ es sobreyectivo, si y sólo si $\text{gr}(p) \geq 1$.
Hint : Puede ser útil el teorema fundamental del álgebra.

b) El objetivo de esta parte es probar que $p(x)$ es inyectivo, si y sólo si $\text{gr}(p) = 1$.
(i) Demuestre que si $\text{gr}(p) = 1$, entonces $p(x)$ es inyectivo.
(ii) Demuestre que si $\text{gr}(p) < 1$, entonces $p(x)$ no es inyectivo.
(iii) Sea $n > 1$, $\lambda, a \in \mathbb{C}$. Definamos $q \in \mathbb{C}[x]$ como:

$$q(x) = \lambda(x-a)^n$$

Demuestre que $q(x)$ no es inyectivo.
(iv) Concluya la dirección que falta.

Solución 5.

a)
- ($\Longrightarrow$)
Probaremos la contrarreciproca, es decir:

$$\text{gr}(p) < 1 \implies p(x) \text{ no es sobreyectiva}$$

Si $\text{gr}(p) < 1$, entonces $p(x) = c$ para algún $c \in \mathbb{C}$. Tomemos entonces $a \neq c$, luego $\forall x \in \mathbb{C}$

$$p(x) = c \neq a$$

De donde vemos que p no es sobreyectivo.
- ($\Longleftarrow$)
Sea $b \in \mathbb{C}$, queremos encontrar $a \in \mathbb{C}$ tal que $p(a) = b$. Definamos entonces el siguiente polinomio:

$$f(x) = p(x) - b$$

Como $\text{gr}(p) \geq 1$, entonces $\text{gr}(f) \geq 1$. Por el teorema fundamental del álgebra existe x_0 tal que $f(x_0) = 0$. Luego:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 0 \\ p(x_0) - b &= 0 \\ p(x_0) &= b \end{aligned}$$

Tomando $a = x_0$ concluimos.

b) (i) Si $\text{gr}(p) = 1$, entonces $p(x) = ax + b$ con $a \neq 0$. Sean $x, y \in \mathbb{C}$, tales que $p(x) = p(y)$, luego:

$$\begin{aligned} p(x) &= p(y) \\ ax + b &= ay + b \\ ax &= ay \\ x &= y \end{aligned}$$

Por tanto $p(x)$ es inyectiva.
(ii) Si $\text{gr}(p) < 1$, entonces $p(x) = a$. Luego $0 \neq 1$, pero $p(0) = p(1)$, es decir $p(x)$ no es inyectiva.
(iii) Como $n > 1$, sea w_0 y w_1 dos raíces n-ésimas de la unidad tal que $w_0 \neq w_1$. Definamos $u_0 = w_0 + a$ y $u_1 = w_1 + a$, es claro que $u_0 \neq u_1$, pero:

$$\begin{aligned} q(u_0) &= \lambda(u_0 - a)^n = \lambda(w_0 + a - a)^n = \lambda(w_0)^n = \lambda \\ q(u_1) &= \lambda(u_1 - a)^n = \lambda(w_1 + a - a)^n = \lambda(w_1)^n = \lambda \end{aligned}$$

Es decir $q(u_0) = q(u_1)$ y por tanto $q(x)$ no es inyectiva.

(iv) Recapitulando. En la parte (i) probamos que:

$$\mathrm{gr}(p) = 1 \implies p(x) \text{ es inyectivo}$$

Nos falta probar la reciproca. Por contrarreciproca probaremos que:

$$\mathrm{gr}(p) \neq 1 \implies p(x) \text{ no es inyectivo}$$

Como el $\mathrm{gr}(p) \neq 1$, tenemos que $\mathrm{gr}(p) < 1$ o $\mathrm{gr}(p) > 1$. Si $\mathrm{gr}(p) < 1$, de donde concluiríamos por la parte (ii). Asumamos entonces que $\mathrm{gr}(p) > 1$, tenemos dos casos:

- **Caso 1:** (p tiene solamente una raíz)
  Si p tiene solo una raíz, llamemosla $a \in \mathbb{C}$, entonces p es de la forma:

  $$p(x) = \lambda(x-a)^n$$

  De donde por la parte (iii), tenemos que $p(x)$ no es inyectiva.
- **Caso 2:** (p tiene al menos dos raíces)
  Si p tiene al menos dos raíces, llamemoslas $a, b \in \mathbb{C}$. Entonces $p(a) = p(b) = 0$, de donde concluimos que $p(x)$ no es inyectiva.

Como de cualquier manera $p(x)$ no es inyectiva, concluimos.