MA1101-2 Introducción al Álgebra
Profesor: José Soto
Auxiliares: Arturo Merino, Nicolás Zalduendo

Pauta 15 : Polinomios

12 de diciembre del 2016

P1. [Raíces de la unidad]
Sean $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$ la raíces n-ésimas de la unidad ordenadas segun argumento creciente.

a) Calcule $\sum_{j=0}^{n-1} w_j$.

b) Demuestre la siguiente relación de ortogonalidad:

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{w_j^k} w_l^k = \begin{cases} n & \text{si } j = l \\ 0 & \text{si } j \neq l \end{cases}$$

c) Sea w una raíz cúbica de la unidad con $w \neq 1$, demuestre que:

$$(1+w)^3 + (1+w^2)^9 + (1+w^3)^6 = 62$$

Solución 1.

a) Notemos primero que:

$$w_j = e^{i\frac{2\pi j}{n}} = e^{\left(i\frac{2\pi}{n}\right)^j} = w_1^j$$

Usando esto:

$$\sum_{j=0}^{n-1} w_j = \underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} w_1^j}_{\text{Geométrica}} = \frac{w_1^n - 1}{w_1 - 1} = \frac{1-1}{w_1 - 1} = 0$$

b) Tenemos que demostrar dos igualdades, una cuando $j = l$ y otra cuando $j \neq l$.

- ($j = l$) En este caso la suma queda:

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{w_j^k} w_j^k = \sum_{k=1}^{n} |w_j^k|^2 = \sum_{k=1}^{n} |w_j|^{2k} = \sum_{k=1}^{n} 1^{2k} = n$$

Donde $|w_j| = 1$ pues es una raíz de la unidad.

- ($j \neq l$) En este caso la suma queda:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \overline{w_j^k} w_j^k &= \sum_{k=1}^{n} \overline{e^{i\frac{2\pi j}{n}}} e^{i\frac{2\pi l}{n}} \\ &= \sum_{k=1}^{n} e^{-i\frac{2\pi jk}{n}} e^{i\frac{2\pi lk}{n}} \\ &= \sum_{k=1}^{n} e^{-i\frac{2\pi jk}{n}} e^{i\frac{2\pi lk}{n}} \\ &= \sum_{k=1}^{n} e^{\left(i\frac{2\pi(l-j)}{n}\right)^k}\end{aligned}$$

$$= \underbrace{\sum_{k=1}^{n} w_{l-j}^{k}}_{\text{Geométrica}}$$

$$= \frac{w_{l-j}^{n+1} - w_{l-j}}{w_{l-j} - w_{l-j}} = \frac{w_{l-j}^{1} - w_{l-j}}{w_{l-j} - w_{l-j}} = 0$$

c) Notemos que para las raices cúbicas de la unidad

$$1 + w_1 + w_2 = 0$$

Notemos que como en el caso de las raíces cúbicas $w_2 = w_1^2$ y $w_1 = w_2^2$ concluimos la siguiente relación para w, donde w es una raíz cúbicaz de la unidad distintas de 1:

$$1 + w + w^2 = 0$$

Esto nos dice que $1+w = -w^2$ y que $1+w^2 = -w$, aplicando esto al lado izquierdo de la ecuación tenemos:

$$\begin{aligned}
(\underbrace{1+w}_{-w^2})^3 + (\underbrace{1+w^2}_{-w})^9 + (1 + \underbrace{w^3}_{1})^6 &= (-w^2)^3 + (-w)^9 + (2)^6 \\
&= -(\underbrace{w^3}_{1})^2 - (\underbrace{w^3}_{1})^3 + 64 \\
&= -1 - 1 + 64 \\
&= 62
\end{aligned}$$

P2. [División y cancelabilidad de Polinomios]

a) Considere $p, d \in \mathbb{R}[x]$

$$\begin{aligned} p(x) &= 4x^4 - 2x^3 - 3 \\ d(x) &= 2x^2 - 3 \end{aligned}$$

Encuentre $q, r \in \mathbb{R}[x]$ tal que $p(x) = q(x)d(x) + r(x)$ con $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(d)$.

b) Pruebe que para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $(x-1)|(x^n - 1)$.

c) Sea $p(x) = x^5 + ax^2 + b$ y $q(x) = x^3 + cx + 1$. Determine los valores de $a, b, c \in \mathbb{C}$ para que $q|p$.

d) Sean $p, q, r \in \mathbb{R}[x]$ tal que $p(q-r) = q(p-r)$ y $\mathrm{gr}(r) \geq 0$. Demuestre que $p = q$.

Solución 2.

a) Notemos que nos estan pidiendo justamente encontrar el cuociente y el resto al dividir los polinomios p y d, utilizando el algoritmo de la división:

$$\begin{array}{rrrrr} \big(\ 4x^4 & -\,2x^3 & & & -\,3\big) : \big(2x^2-3\big) = 2x^2 - x + 3 + \dfrac{-3x+6}{2x^2-3} \\ -\,4x^4 & & +\,6x^2 & & \\ \hline & -\,2x^3 & +\,6x^2 & & \\ & 2x^3 & & -\,3x & \\ \hline & & 6x^2 & -\,3x & -\,3 \\ & & -\,6x^2 & & +\,9 \\ \hline & & & -\,3x & +\,6 \end{array}$$

De donde vemos que el cuociente es $q(x) = 2x^2 - x + 3$ y que el resto es $r(x) = -3x + 6$.

Dos formas para hacerlo:

- **(Forma 1)** Dividamos un par de estos polinomios:

$$\begin{array}{rrr} \big(\ x^2 & & -\,1\big) : \big(x-1\big) = x+1 \\ -\,x^2 & +\,x & \\ \hline & x & -\,1 \\ & -\,x & +\,1 \\ \hline & & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr} \big(\ x^3 & & & -\,1\big) : \big(x-1\big) = x^2+x+1 \\ -\,x^3 & +\,x^2 & & \\ \hline & x^2 & & \\ & -\,x^2 & +\,x & \\ \hline & & x & -\,1 \\ & & -\,x & +\,1 \\ \hline & & & 0 \end{array}$$

Notemos que esto nos da para pensar de que $x^n - 1 = (x-1)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1})$. Demostremos esto, en efecto:

$$\begin{aligned} (x-1)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}) &= (x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n) - (1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}) \\ &= x^n - 1 \end{aligned}$$

Luego como $x^n - 1 = (x-1)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1})$, tenemos que $x - 1$ divide a $x^n - 1$.

- **(Forma 2)** Por inducción. El caso base se tiene pues $(x-1)|(x^1-1)$, tenemos como hipótesis inductiva que $(x-1)|(x^n-1)$, es decir que $(x^n-1)=(x-1)p(x)$ para algún polinomio p. Para el caso $n+1$ tenemos que:
$$x^{n+1}-1 = x^{n+1}-x^n+\underbrace{x^n-1}_{\text{H.I.}} = x^n(x-1)+p(x)(x-1) = (x-1)(x^n+p(x))$$
De donde se ve que $(x-1)$ divide a $x^{n+1}-1$.

- Dividiendo ambos polinomios tenemos:
$$\begin{array}{rrrrr}
\big(\quad x^5 & & +ax^2 & & +b\big) : \big(x^3+cx+1\big) = x^2-c+\dfrac{(-1+1a)\,x^2+c^2x+(1c+1b)}{x^3+cx+1} \\
-x^5-cx^3 & & -x^2 & & \\
\hline
& -cx^3+(-1+1a)\,x^2 & & & +b \\
& cx^3 & & +c^2x & +c \\
\hline
& & (-1+1a)\,x^2 & +c^2x & +(1c+1b)
\end{array}$$
Como el resto debe ser 0, tenemos que tener $a=-1$, $b=0$ y $c=0$.

- Notemos que como $\mathrm{gr}(r)\geq 0$, entonces r no es el polinomio 0. Luego:
$$\begin{aligned}
p(q-r) &= q(p-r)\\
pq-pr &= qp-qr\\
pq-pr &= pq-qr\\
pr &= qr\\
p &= q
\end{aligned}$$
Donde se ocupó el hecho de que los polinomios son un anillo conmutativo sin divisores del cero (es decir, todo elemento no nulo es cancelable).

P3. [Coeficientes]

a) Encuentre el coeficiente que acompaña a x^{17} en el polinomio $(1+x^5+x^7)^{20}$.

b) Encuentre el coeficiente que acompaña a x^{12} en el polinomio $(1+x^2+x^5+x^7)^{25}$.

c) Pruebe que:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$$

Para esto compare los coeficientes de los polinomios $(1+x)^{2n}$ y $(1+x)^n(1+x)^n$ de manera adecuada.

Solución 3.

a) Lo resolveremos de dos formas, una primera usando iterativamente el teorema del Binomio y una segunda usando argumentos combinatoriales. Usando el teorema del binomio tenemos:

$$\begin{aligned}(1+\underbrace{x^5+x^7}_{p})^{20} &= \underbrace{(1+p)^{20}}_{\text{Teo. Binomio}}\\ &=\sum_{i=0}^{20}\binom{20}{i}1^{20-i}p^i\\ &=\sum_{i=0}^{20}\binom{20}{i}\underbrace{(x^5+x^7)^i}_{\text{Teo. Binomio}}\\ &=\sum_{i=0}^{20}\binom{20}{i}\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}x^{5(i-j)}x^{7j}\\ &=\sum_{i=0}^{20}\sum_{j=0}^{i}\binom{20}{i}\binom{i}{j}x^{5(i-j)}x^{7j}\end{aligned}$$

Notemos que la única forma de formar 17 con los exponentes que tenemos es como $2\cdot 5+1\cdot 7=17$, es decir necesitamos que:

$$j=1,\quad i-j=2\implies j=1,i=3$$

Luego tenemos que el coeficiente que acompaña a x^{17} es:

$$\binom{20}{3}\binom{3}{1}=\frac{20!}{3!17!}\frac{3!}{1!2!}=\frac{20!}{17!2!}=\frac{20\cdot 19\cdot 18}{10}=10\cdot 19\cdot 18=3420$$

Otra forma de hacerlo es mediante el siguiente argumento combinatorial. Notemos que nosotros tenemos el siguiente producto:

$$(1+x^5+x^7)(1+x^5+x^7)\underbrace{\ldots}_{\text{20 veces}}(1+x^5+x^7)$$

Notemos que cada vez que obtenemos un término de este producto lo que hacemos es elegir 1 elemento de cada paréntesis y multiplicarlos juntos. Nuevamente para obtener 17 tenemos que elegir dos x^5 y un x^7. ¿De cuantas maneras se puede hacer esto? Notemos que los x^5 los podemos elegir de $\binom{20}{2}$ maneras (pues esto es elegir 2 elementos entre 20) y al hacer esto hay dos parentesis que no se pueden ocupar, luego elegir el x^7 se puede hacer de 18 formas, por tanto el total de formas de formar x^17 (y por tanto el coeficiente que acompaña al x^17) es:

$$\binom{20}{2}18=\frac{20!}{2!20!}18=\frac{20\cdot 19}{2}\cdot 18=10\cdot 19\cdot 18=3420$$

b) No lo haremos mediante el teorema del binomio (pues hay que hacer 3 teoremas del Binomio). Nuevamente tenemos un producto del estilo:

$$(1+x^2+x^5+x^7)(1+x^2+x^5+x^7)\underbrace{\dots}_{25\text{ veces}}(1+x^2+x^5+x^7)$$

¿De cuantas maneras podemos formar 12? De las siguientes formas:

$$12 = 6\cdot 2,\quad 12 = 2\cdot 5 + 1\cdot 2,\quad 12 = 1\cdot 5 + 1\cdot 7$$

Notemos que para la primera forma tenemos que elegir 6 dos entre los 25 paréntesis, esto se puede hacer de $\binom{25}{6}$ maneras.

Para la segunda forma tenemos que elegir 2 cincos y un dos entre los 25 paréntesis, esto se puede hacer de $\binom{25}{2}23$ maneras.

Para la última forma hay que elegir un cinco y un siete, esto se puede hacer de $25\cdot 24$ maneras.

Por último cada una de estas opciones aporta a formar coeficientes para x^{12}, por lo tanto el coeficiente que acompaña a x^{12} es:

$$\binom{25}{6}+\binom{25}{2}23+25\cdot 24 = \frac{25!}{6!19!}+\left(\frac{25!}{2!23!}\right)+25\cdot 24 = \frac{25\cdot 24\cdot 23\cdot 22\cdot 21\cdot 20}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}+\frac{25\cdot 24}{3\cdot 2}+25\cdot 24$$

Simplificando tenemos:

$$5\cdot 23\cdot 22\cdot 7\cdot 10 + 25\cdot 4 + 25\cdot 24 = 177100 + 100 + 600 = 177800$$

c) Sea $p(x) = (1+x)^{2n}$, expandamoslo de las manera que nos indican:

$$p(x) = \underbrace{(1+x)^{2n}}_{\text{Teo. Binomio}} = \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}x^k$$

Notemos que el coeficiente que acompaña a x^n es $\binom{2n}{n}$. Por otro lado:

$$p(x) = \underbrace{(1+x)^n}_{\text{Teo. Binomio}}\underbrace{(1+x)^n}_{\text{Teo. Binomio}} = \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\right)}_{\text{Producto de Polinomios}} = \sum_{k=0}^{2n}\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{n}{k-i}x^k$$

Notemos que el coeficiente que acompaña a x^n es:

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\underbrace{\binom{n}{n-i}}_{=\binom{n}{i}} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2$$

Como los polinomios son iguales, los coeficientes que acompañan a x^n deben ser iguales, es decir:

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$$

Que era lo pedido.

P4. [Composición]

a) Sean $p, q \in \mathbb{C}[x]$ tales que $\mathrm{gr}(p) = n$ y $\mathrm{gr}(q) = m$. Demuestre que $p \circ q$ es un polinomio y calcule $\mathrm{gr}(p \circ q)$.

b) Encuentre todos los $p \in \mathbb{C}[x]$ tales que:

$$p(x^2) = (x^2+1)p(x) \qquad p(p(x)) = p(x)$$

Hint: Puede ser útil encontrar $\mathrm{gr}(p)$ *antes que* p*.*

Solución 4.

a) Notemos que:

$$\begin{aligned} p(x) &= \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \\ q(x) &= \sum_{l=0}^{m} b_l x^l \end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned} p \circ q(x) &= p(q(x)) \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k (q(x))^k \end{aligned}$$

Notemos que $(q(x))^k$ es un polinomio para todo k (pues es la multiplicación de k polinomios), luego $a_k(q(x))^k$ es un polinomio (pues es la multiplicación de a_k y $(q(x))^k$) ambos polinomios, por último $p \circ q(x)$ es la suma de todos los polinomios $a_k(q(x))^k$ y por tanto es un polinomio. Para calcular el grado notemos que si $a_k \neq 0$:

$$\mathrm{gr}(a_k(q(x))^k) = \mathrm{gr}(a_k \underbrace{q(x)\ldots q(x)}_{k \text{ veces}}) = 0 + \underbrace{m + m + \ldots + m}_{k \text{ veces}} = km$$

Y por tanto:

$$p \circ q(x) = a_0 + a_1 q(x) + a_2(q(x))^2 + \ldots + a_{n-1}(q(x)^{n-1}) + \underbrace{a_n q(x)^n}_{a_n \neq 0, \text{ el grado es } mn}$$

Es decir el último sumando tiene un coeficiente no nulo que acompaña a x^{mn}, llamemoslo b, como los demás polinomios de los otros sumandos tienen grado a lo más $x^{(n-1)m}$ nada puede cancelar al elemento bx^{mn} y por tanto $\mathrm{gr}(p \circ q) = mn$.

Obs : Si uno quisiera ser muy formal habría que separarse en el caso cuando $m = -\infty$ *y cuando* $n = -\infty$

b) Trabajemos nuestra primera ecuación:

$$\begin{aligned} p(x^2) &= (x^2+1)p(x) \\ \mathrm{gr}(p(x^2)) &= \mathrm{gr}((x^2+1)p(x)) \\ \mathrm{gr}(p)\,\mathrm{gr}(x^2) &= \mathrm{gr}(x^2+1) + \mathrm{gr}(p) \\ 2\,\mathrm{gr}(p) &= 2 + \mathrm{gr}(p) \end{aligned}$$

Es decir $\mathrm{gr}(p) = -\infty$ o $\mathrm{gr}(p) = 2$. Pongámonos en casos

- **Caso 1:** ($\mathrm{gr}(p) = -\infty$)
  Si el $\mathrm{gr}(p)$ es $-\infty$, entonces $p(x) = 0$. Como:

  $$p(x^2) = 0 = (x^2+1) \cdot 0 = (x^2+1)p(x)$$

  Satisface la ecuación, entonces es solución.

- **Caso 2:** ($\mathrm{gr}(p) = 2$)
  En este caso tenemos que $p(x) = ax^2 + bx + c$, luego:

$$\begin{aligned} p(x^2) &= (x^2+1)p(x) \\ ax^4 + bx^2 + c &= (x^2+1)(ax^2+bx+c) \\ ax^4 + bx^2 + c &= ax^4 + bx^3 + (a+c)x^2 + bx + c \end{aligned}$$

  Para que ocurra esto debemos tener que $b = 0$ y $c = -a$. Luego $p(x) = ax^2 - a$ con $a \neq 0$ es solución.

El total de soluciones entonces son los polinomios de la forma:

$$p(x) = ax^2 - a$$

Con $a \in \mathbb{C}$.
Para resolver la segunda ecuación partimos con la misma idea de calcular el grado:

$$\begin{aligned} p \circ p &= p \\ \mathrm{gr}(p \circ p) &= \mathrm{gr}(p) \\ \mathrm{gr}(p)^2 &= \mathrm{gr}(p) \end{aligned}$$

Es decir $\mathrm{gr}(p) = -\infty$, $\mathrm{gr}(p) = 0$ o $\mathrm{gr}(p) = 1$. Poniéndonos en casos tenemos que:

- **Caso 1:** ($\mathrm{gr}(p) = -\infty$ o $\mathrm{gr}(p) = 0$)
  En este caso $p(x) = c$ donde $c \in \mathbb{C}$. Luego:

$$p(p(x)) = p(c) = c = p(x)$$

  De donde concluimos que es solución.
- **Caso 2:** ($\mathrm{gr}(p) = 1$)
  En este caso $p(x) = ax + b$. Luego:

$$\begin{aligned} p(ax+b) &= ax + b \\ a(ax+b) + b &= ax + b \\ a^2x + ab + b &= ax + b \end{aligned}$$

  Como $\mathrm{gr}(p) = 1$ sabemos que $a \neq 0$, por ende $a = 1$ y $b = 0$. Luego en este caso $p(x) = x$.

Por tanto las soluciones a esta ecuación son $p(x) = x$ o $p(x) = c$ para todo $c \in \mathbb{C}$.

P5. [La igualdad es por coordenadas]

a) Sean $p, q \in \mathbb{R}[x]$ tales que:

$$\begin{array}{rcl} p(x) & = & (2+f)+(e+f)x+(a-d)x^4+(2a+c)x^5+(a+b)x^7 \\ q(x) & = & 3+(f+2)x+(a+b+c+d)x^3+(b+c+1)x^4+bx^5 \end{array}$$

Determine los valores de $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ tales que $p = q$. Escriba el polinomio resultante.

b) Sea $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ un polinomio con coeficientes en $\mathbb{C}$ tal que:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

Se define $q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ por

$$q(x) = p(ix)$$

(i) Demuestre que $q(x)$ es un polinomio y de explícitamente sus coeficientes en función de los coeficientes de p.

(ii) Demuestre que:

$$p = q \iff \text{para cada } k \text{ que no es múltiplo de 4, } a_k = 0.$$

Solución 5.

1) Recordando que dos polinomios son iguales si y sólo si sus coeficientes son iguales, vemos que:

$$\begin{array}{rcl} 2+f & = & 3 \\ e+f & = & f+2 \\ 0 & = & a+b+c+d \\ a-d & = & b+c+1 \\ 2a+c & = & b \\ a+b & = & 0 \end{array}$$

Tenemos 6 incógnitas y 6 ecuaciones, resolviendo el sistema obtenemos:

$$a = \frac{1}{2} \quad b = -\frac{1}{2} \quad c = \frac{3}{2} \quad d = -\frac{3}{2} \quad e = 2 \quad f = 1$$

Por tanto el polinomio resultante es:

$$p(x) = q(x) = 3 + 3x - x^4 - \frac{1}{2}x^5$$

2) (i) Notemos que:

$$\begin{array}{rcl} q(x) & = & p(ix) \\ & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k (ix)^k \\ & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \underbrace{(a_k i^k)}_{=b_k} x^k \\ & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k x^k \end{array}$$

De donde vemos que q es un polinomio con coeficientes $b_k = a_k i^k$.

(ii) Tenemos la siguiente cadena de equivalencias:

$$\begin{aligned}
& p = q \\
\iff & \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, (a_k = b_k) \\
\iff & \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, (a_k = a_k i^k) \\
\iff & \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, (a_k = 0 \quad \vee \quad i^k = 1) \\
\iff & \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, (a_k = 0 \quad \vee \quad k \text{ es múltiplo de } 4)
\end{aligned}$$

De donde concluimos el resultado.