

MA1101-2 Introducción al Álgebra

Profesor: José Soto

Auxiliar: Arturo Merino, Nicolás Zalduendo



Pauta 6 : Relaciones

28 de octubre del 2016

P1. [Relación inversa]

Dado E un conjunto no vacío y $\mathcal{R}$ una relación sobre él. Definimos la relación $\tilde{\mathcal{R}}$ de la siguiente forma:

$$\forall (a, b) \in E \times E, \quad a\tilde{\mathcal{R}}b \Leftrightarrow b\mathcal{R}a.$$

- a) Muestre que si $\mathcal{R}$ es relación de orden, entonces $\tilde{\mathcal{R}}$ también lo es.
 b) Muestre que si $\mathcal{R}$ es relación de equivalencia, entonces $\tilde{\mathcal{R}}$ también lo es.

Solución 1.

- a) Recordemos que una relación es de orden si y sólo si es refleja, transitiva y antisimétrica. Luego, lo que haremos es demostrar estas tres propiedades por separado para concluir.

- $\tilde{\mathcal{R}}$ refleja: Sea $a \in E$, como $\mathcal{R}$ es refleja, sabemos entonces que

$$a\mathcal{R}a \Leftrightarrow a\tilde{\mathcal{R}}a,$$

de donde deducimos que $\tilde{\mathcal{R}}$ es refleja cuando $\mathcal{R}$ lo es.

- $\tilde{\mathcal{R}}$ transitiva: Sean $a, b, c \in E$ tales que $a\tilde{\mathcal{R}}b \wedge b\tilde{\mathcal{R}}c$. Entonces,

$$a\tilde{\mathcal{R}}b \wedge b\tilde{\mathcal{R}}c \Leftrightarrow b\mathcal{R}a \wedge c\mathcal{R}b \Rightarrow c\mathcal{R}a \Leftrightarrow a\tilde{\mathcal{R}}c,$$

de donde concluimos que $\tilde{\mathcal{R}}$ es transitiva cuando $\mathcal{R}$ lo es.

- $\tilde{\mathcal{R}}$ antisimétrica: Sean $a, b \in E$ tales que $a\tilde{\mathcal{R}}b \wedge b\tilde{\mathcal{R}}a$, queremos demostrar que. $a = b$. En efecto:

$$a\tilde{\mathcal{R}}b \wedge b\tilde{\mathcal{R}}a \Leftrightarrow b\mathcal{R}a \wedge a\mathcal{R}b \Rightarrow a = b,$$

donde la última implicancia sale de que $\mathcal{R}$ es antisimétrica. Luego, se deduce que en este caso, $\tilde{\mathcal{R}}$ también es antisimétrica.

De todo lo demostrado anteriormente, se deduce que $\tilde{\mathcal{R}}$ es relación de orden cuando $\mathcal{R}$ también lo es.

- b) Ahora debemos chequear que la relación sea refleja, transitiva y simétrica. Las dos primeras propiedades ya fueron demostradas y no dependían de la antisimetría de la relación previa. Luego, probemos sólo la que falta:

- $\tilde{\mathcal{R}}$ simétrica: Sean x, y tales que $x\tilde{\mathcal{R}}y$. Luego,

$$x\tilde{\mathcal{R}}y \Leftrightarrow y\mathcal{R}x \Rightarrow x\mathcal{R}y \Leftrightarrow y\tilde{\mathcal{R}}x,$$

de donde se deduce la simetría de la relación cuando $\mathcal{R}$ es simétrica.

P2. [Relaciones de equivalencia y orden]

- a) Se define la relación $\mathcal{R}$ en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ por $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow xy > 0$.
- (i) Determine si $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia o de orden (podría no ser ninguna de las dos)
 - (ii) Si la relación es de equivalencia, calcule todas las clases de equivalencia. Si es de orden determine si el orden es parcial o total.
- b) Sea E un conjunto no vacío y considere $K \in \mathcal{P}(E)$ fijo, con $K \neq \emptyset$.
Se define en $\mathcal{P}(E)$ la relación $\mathcal{R}_K$ por:
- $$A\mathcal{R}_KB \Leftrightarrow B \cap K \subseteq A.$$
- (i) Demuestre que $\mathcal{R}_K$ es refleja y transitiva.
 - (ii) Proponga un conjunto $K \in \mathcal{P}(E)$ tal que $\mathcal{R}_K$ sea una relación de orden. Justifique su elección.

Solución 2.

- a) 1) Veamos que cosas se verifican:

- $\mathcal{R}$ refleja: Sea $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Luego, por propiedades de reales sabemos que $x^2 > 0 \Leftrightarrow x\mathcal{R}x$.
- $\mathcal{R}$ simétrica: Sean $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tales que $x\mathcal{R}y$. Luego:

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow xy > 0 \Leftrightarrow yx > 0 \Leftrightarrow y\mathcal{R}x.$$

- $\mathcal{R}$ transitiva: Sean $x, y, z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tales que

$$x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \Leftrightarrow xy > 0 \wedge yz > 0 \Rightarrow xy^2z > 0 \Rightarrow xz > 0 \Leftrightarrow x\mathcal{R}z.$$

Luego, concluimos que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia. Para ver que no es de orden, basta con notar que no es antisimétrica, en particular:

$$1\mathcal{R}3 \wedge 3\mathcal{R}1$$

Pero $1 \neq 3$.

- 2) Calculemos las clases de equivalencia, notemos que sólo tenemos dos casos posibles dependiendo del signo de x :

- Si $x > 0$, esto implica que $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow xy > 0 \Leftrightarrow y > 0$. Por ende, en este caso:

$$[x]_{\mathcal{R}} = \{y \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : y > 0\} = \mathbb{R}_+.$$

- Por otro lado, si $x < 0$, tendremos que $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow xy > 0 \Leftrightarrow y < 0$, y luego:

$$[x]_{\mathcal{R}} = \{y \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : y < 0\} = \mathbb{R}_-.$$

Como hemos cubierto todos los casos posibles con el estudio anterior, no hay más clases de equivalencia que se puedan calcular diferentes a las ya obtenidas, y por lo tanto:

$$(\mathbb{R} \setminus \{0\})/\mathcal{R} = \{\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_-\}.$$

- b) 1) Veamos lo pedido directamente:

- $\mathcal{R}_K$ refleja: Es claro que, para todo $A \in \mathcal{P}(E)$,

$$A \cap K \subseteq A \Rightarrow A\mathcal{R}_KA.$$

- $\mathcal{R}_K$ transitiva: Sean $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$ tales que $A\mathcal{R}_KB \wedge B\mathcal{R}_KC$, luego:

$$A\mathcal{R}_KB \wedge B\mathcal{R}_KC \Leftrightarrow B \cap K \subseteq A \wedge C \cap K \subseteq B,$$

de donde vemos que

$$C \cap K \subseteq B \Rightarrow (C \cap K) \cap K \subseteq B \cap K \Leftrightarrow C \cap K \subseteq B \cap K \subseteq A,$$

de donde deducimos que $C \cap K \subseteq A \Leftrightarrow A\mathcal{R}_KC$.

2) Si elegimos por ejemplo $K = E$, notamos que la relación $A\mathcal{R}_EB$ toma la forma:

$$A\mathcal{R}_EB \iff A \cap E \subseteq B \iff A \subseteq B.$$

Luego, como ahora la relación queda determinada por la inclusión de conjuntos, veamos que es antisimétrica. En efecto, sean $A, B \in \mathcal{P}(E)$ tales que $A\mathcal{R}_EB \wedge B\mathcal{R}_EA$; por definición esto nos dice que

$$A \subseteq B \wedge B \subseteq A \implies A = B,$$

por lo que nuestra relación queda antisimétrica para $K = E$, y por lo demostrado anteriormente resulta ser una relación de orden en $\mathcal{P}(E)$.

P3. [Relaciones de proposiciones lógicas]

Sobre un conjunto de proposiciones lógicas $\mathcal{P}$, se define la relación $\mathcal{R}$ por:

$$p\mathcal{R}q \Leftrightarrow ((p \wedge q) \Leftrightarrow q).$$

Además, para $p, q \in \mathcal{P}$ se dice que $p = q$ si y sólo si $p \Leftrightarrow q$.

- a) Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de orden sobre $\mathcal{P}$.
- b) Pruebe que $\mathcal{R}$ es una relación de orden total.

Solución 3.

- a) Probemos cada propiedad por separado:

- $\mathcal{R}$ refleja: Sea $p \in \mathcal{P}$, es claro entonces que

$$p \wedge p \Leftrightarrow p,$$

lo que nos dice directamente que $p\mathcal{R}p$.

- $\mathcal{R}$ transitiva: Sean $p, q, r \in \mathcal{P}$ tal que $p\mathcal{R}q \wedge q\mathcal{R}r$, por definición esto nos dice que

$$(p \wedge q) \Leftrightarrow q \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow r,$$

de donde podemos ver que

$$r \Leftrightarrow (q \wedge r) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge (q \wedge r)) \Leftrightarrow (p \wedge r),$$

vale decir, hemos probado que $p\mathcal{R}r$.

- $\mathcal{R}$ antisimétrica: Sean $p, q \in \mathcal{P}$ tales que $p\mathcal{R}q \wedge q\mathcal{R}p$; vale decir

$$(p \wedge q) \Leftrightarrow q \wedge (q \wedge p) \Leftrightarrow p,$$

de donde obtenemos que

$$[p \Leftrightarrow (p \wedge q) \Leftrightarrow q] \Rightarrow p \Leftrightarrow q.$$

- b) Sean $p, q \in \mathcal{P}$ un par cualquiera. Notemos entonces que:

- $p \Leftrightarrow V \wedge q \Leftrightarrow V \Leftrightarrow (p \wedge q) \Leftrightarrow V$.
- $p \Leftrightarrow V \wedge q \Leftrightarrow F \Leftrightarrow (p \wedge q) \Leftrightarrow F$.
- $p \Leftrightarrow F \wedge q \Leftrightarrow V \Leftrightarrow (p \wedge q) \Leftrightarrow F$.
- $p \Leftrightarrow F \wedge q \Leftrightarrow F \Leftrightarrow (p \wedge q) \Leftrightarrow F$.

De lo anterior, podemos ver que en cualquiera de los cuatro casos, la conjunción $p \wedge q$ posee el mismo valor de verdad que alguna de las proposiciones p o q . Luego, siempre tendremos que $p\mathcal{R}q$, o en caso contrario tendremos que $q\mathcal{R}p$. Así, se concluye que el orden estudiado es total.

P4. [Módulo]

Sea $\mathcal{R}$ la siguiente relación en $\mathbb{Z}^2$ definida por:

$$(a, b)\mathcal{R}(c, d) \iff a + b \equiv_2 c + 3d$$

- Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.
- Demuestre que $[(0, 0)]_{\mathcal{R}} \cup [(1, 0)]_{\mathcal{R}} = \mathbb{Z}^2$, pero que $[(0, 0)]_{\mathcal{R}} \cap [(1, 0)]_{\mathcal{R}} = \emptyset$.
- ¿Cuántos elementos tiene $\mathbb{Z}^2/\mathcal{R}$?

Solución 4. Recordemos que la relación $\equiv_2$ en $\mathbb{Z}$:

$$x \equiv_2 y \iff [\exists k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } (x - y) = 2k]$$

Esto puede ser visto como que x e y tienen la misma paridad. En el caso de $\mathcal{R}$ notemos que:

$$\begin{aligned} (a, b)\mathcal{R}(c, d) &\iff a + b \equiv_2 c + 3d \\ &\iff [\exists k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } c + 3d - a - b = 2k] \\ &\iff [\exists k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } c + d - a - b = 2(\underbrace{k - d}_{\lambda})] \\ &\iff [\exists \lambda \in \mathbb{Z} \text{ tal que } c + d - a - b = 2\lambda] \\ &\iff a + b \equiv_2 c + d \end{aligned}$$

Es decir $(a, b)\mathcal{R}(c, d)$ si y sólo si $a + b$ y $c + d$ tienen la misma paridad.

- **Refleja:** $a + b$ tiene la misma paridad que $a + b$, por ende $(a, b)\mathcal{R}(a, b)$
 - **Simétrica:** Supongamos $(a, b)\mathcal{R}(c, d)$, Es decir $a + b$ tiene la misma paridad que $c + d$, esto es lo mismo que $c + d$ tenga la misma paridad que $a + b$, luego $(c, d)\mathcal{R}(a, b)$.
 - **Transitiva:** Supongamos $(a, b)\mathcal{R}(c, d)$ y que $(c, d)\mathcal{R}(e, f)$. Es decir $a + b$ tiene la misma paridad que $c + d$ y $c + d$ tiene la misma paridad que $e + f$. Es evidente de esto que $a + b$ tiene la misma paridad que $e + f$, por lo tanto:

$$(a, b)\mathcal{R}(e, f)$$

- Sea $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, luego $a + b$ es par o impar. Si $a + b$ es par, entonces $a + b \in [(0, 0)]_{\mathcal{R}}$, mientras que si $a + b$ es impar tenemos que $a + b \in [(1, 0)]_{\mathcal{R}}$. De esto concluimos que:

$$[(0, 0)]_{\mathcal{R}} \cup [(1, 0)]_{\mathcal{R}} = \mathbb{Z}^2$$

Además es claro que no existe ningún $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tal que $a + b$ sea par e impar a la vez, por tanto:

$$[(0, 0)]_{\mathcal{R}} \cap [(1, 0)]_{\mathcal{R}} = \emptyset$$

- Por la parte b) vemos que $[(0, 0)]_{\mathcal{R}}$ y $[(1, 0)]_{\mathcal{R}}$ son una partición por clases de $\mathcal{R}$ de $\mathbb{Z}^2$ por tanto son todas las clases de equivalencia de $\mathcal{R}$. De esto concluimos que $\mathbb{Z}^2/\mathcal{R}$ tiene 2 elementos.