

MA1101-2 Introducción al Álgebra.

Profesor: José Soto.

Auxiliares: Arturo Merino,
Nicolás Zalduendo.

Resumen C1

- Una proposición lógica es un enunciado que toma un valor de verdad V o F .
- Los conectivos lógicos son operaciones entre proposiciones y permiten construir nuevas proposiciones a partir de proposiciones ya conocidas.
- Las tablas de verdad de las proposiciones básicas son:

p	$\bar{p}$	p	q	$p \vee q$	p	q	$p \wedge q$
V	F	V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	F	F
F	V	F	V	V	F	V	F
F	V	F	F	F	F	F	F

- Los conectivos $\vee$ y $\wedge$ son asociativos, conmutativos y distribuyen uno con respecto a otro.
- Otras proposiciones conocidas son:
 1. $(p \implies q) \equiv (\bar{p} \vee q)$
 2. $(p \iff q) \equiv [(p \implies q) \wedge (q \implies p)]$
 3. $(p \nabla q) \equiv (\bar{p} \iff \bar{q})$
- Se dirá que una proposición es una tautología si su valor de verdad es siempre V , en cambio si es siempre F diremos que es una contradicción.
- Algunas tautologías útiles son:
 1. $\overline{(p \vee q)} \iff (\bar{p} \wedge \bar{q})$
 2. $\overline{(p \wedge q)} \iff (\bar{p} \vee \bar{q})$
 3. $(p \implies q) \iff (\bar{q} \implies \bar{p})$
 4. $[(p \implies q) \wedge (q \implies r)] \implies (p \implies r)$
- Una función proposicional es una expresión $p(x)$, tal que al reemplazar x en la función esta se transforma en una proposición $p(x)$.
- Un cuantificador nos proporciona información sobre los objetos a evaluar en la función proposicional. Los clásicos cuantificadores son :

1. Cuantificador Universal ($\forall$), se lee “para todo”.
2. Cuantificador Existencial ($\exists$), se lee “existe”.
3. Cuantificador de Existencia y Unicidad ($\exists!$), se lee “existe un único”.

- Las negaciones clásicas con cuantificadores son:

1. $\overline{[\forall x, p(x)]} \iff [\exists x, \overline{p(x)}]$
2. $\overline{[\exists x, p(x)]} \iff [\forall x, \overline{p(x)}]$
3. $\overline{[\exists! x, p(x)]} \iff [\forall x, p(x)] \vee [\exists x, y, p(x) \wedge p(y) \wedge x \neq y]$

- La proposición $x \in A$ se lee x pertenece al conjunto A .
- A partir de un conjunto universo $\mathcal{U}$ y una proposición lógica $p(x)$, podemos definir el conjunto A de quienes satisfacen la proposición lógica como:

$$(\forall x)[(x \in A) \iff (x \in \mathcal{U} \wedge p(x))]$$

O de manera abreviada:

$$A = \{x \in \mathcal{U} : p(x)\}$$

- Se define el conjunto vacío como:

$$\emptyset = \{x \in \mathcal{U} : x \neq x\} = \{\}$$

- Diremos que A es subconjunto de B si:

$$(A \subseteq B) \iff [(x \in A) \implies (x \in B)]$$

De similar manera:

$$(A = B) \iff [(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)]$$

- Sean A y B dos subconjuntos de $\mathcal{U}$. Definimos las siguientes operaciones entre conjuntos :

1. $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$
2. $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$
3. $A^c = \{x : x \notin A\}$
4. $A \setminus B = A \cap B^c$
5. $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

- La unión e intersección satisfacen las leyes de conmutatividad, asociatividad, distributividad y de Morgan.
- Definimos el conjunto de las partes de un conjunto A como la familia de todos los subconjuntos de A .

$$\mathcal{P}(A) = 2^A = \{X \subseteq A\}$$

- Sea $a \in A$ y $b \in B$, definimos el par ordenado (a, b) como:

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

- La igualdad de pares ordenados es por coordenadas, es decir:

$$(a, b) = (c, d) \iff (a = c \wedge b = d)$$

- Definimos el producto entre A y B como:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$$

- Llamaremos función de A en B a cualquier $f \subseteq A \times B$ tal que:

$$(\forall a \in A)(\exists! b \in B) \quad (a, b) \in f$$

Si f es una función de A en B lo anotaremos como $f : A \rightarrow B$, de igual manera si $(a, b) \in f$ lo anotaremos $f(a) = b$.

- Si $f : A \rightarrow B$ al conjunto A lo llamaremos dominio de f y a B lo llamaremos el recorrido de f .
- Si $f : A \rightarrow B$ y $g : C \rightarrow D$ entonces:

$$f = g \iff \left[\begin{array}{c} \text{Dom}(f) = \text{Dom}(g) \\ \wedge \\ \text{Rec}(f) = \text{Rec}(g) \\ \wedge \\ (\forall x \in \text{Dom}(f))(f(x) = g(x)) \end{array} \right]$$

- Sea $f : A \rightarrow B$. Diremos que f es inyectiva si $\forall x, y$ verifica:

$$x \neq y \implies f(x) \neq f(y)$$

O de manera equivalente:

$$f(x) = f(y) \implies x = y$$

- Sea $f : A \rightarrow B$ diremos que f es sobreyectiva (o epiyectiva) si verifica:

$$[\forall y \in B][\exists x \in A][y = f(x)]$$

- Diremos que una función es biyectiva si es sobreyectiva e inyectiva.
- Sea f biyectiva. Definimos f^{-1} como:

$$[\forall x \in A][\forall y \in B][f(x) = y \iff f^{-1}(y) = x]$$

- Sea $f : A \rightarrow B$ y $X \subseteq A$, definimos:

$$f(X) = \{b \in B : \exists x \in X, f(x) = b\}$$

- Sea $f : A \rightarrow B$ y $X \subseteq B$, definimos:

$$f^{-1}(X) = \{a \in A : f(a) \in X\}$$

- Sea $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$ definimos la función composición $(g \circ f) : A \rightarrow C$ como:

$$(g \circ f)(a) = g(f(a))$$

- Sea $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ y $h : C \rightarrow D$, entonces:

$$1. h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

$$2. I_B \circ f = f \circ I_A = f, \text{ donde } I_X \text{ es la función identidad del conjunto } X.$$

$$3. \text{ Si } f \text{ es biyectiva, entonces } f \circ f^{-1} = I_B \text{ y } f^{-1} \circ f = I_A.$$

- Sea $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$, entonces:

$$1. \text{ Si } f \text{ y } g \text{ son inyectivas, entonces } (g \circ f) \text{ es inyectiva.}$$

$$2. \text{ Si } f \text{ y } g \text{ son sobreyectivas, entonces } (g \circ f) \text{ es sobreyectiva.}$$

$$3. \text{ Si } f \text{ y } g \text{ son biyectivas, entonces } (g \circ f) \text{ es biyectiva.}$$

$$4. \text{ Si } (g \circ f) \text{ es inyectiva, entonces } f \text{ es inyectiva.}$$

$$5. \text{ Si } (g \circ f) \text{ es sobreyectiva, entonces } g \text{ es sobreyectiva.}$$

- Sea $f : A \rightarrow B$ biyectiva y sea $g : B \rightarrow A$

$$1. \text{ Si } g \circ f = I_A, \text{ entonces } g = f^{-1}$$

$$2. \text{ Si } f \circ g = I_B, \text{ entonces } g = f^{-1}.$$

- Sean $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow A$ tales que:

$$g \circ f = I_A \quad f \circ g = I_B$$

Entonces f y g son biyectivas y $f^{-1} = g$.

- Sea $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow A$ biyectivas, entonces:

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$