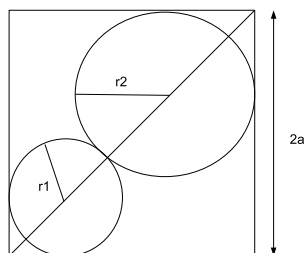




Examen

P1. En un cuadrado de lado $2a$ se inscriben dos circunferencias de radios r_1 y r_2 , centradas en la diagonal del cuadrado, tangentes entre si y ambas tangentes al cuadrado (ver figura).



(i) (0,5 ptos.) Demuestre que $r_1 + r_2 = \frac{4a}{2 + \sqrt{2}}$.

(ii) (2,5 ptos.) Determine los valores de r_1 y r_2 de modo que la suma de las áreas de ambos círculos sea máxima. Justifique.

P2. a) (1,0 pto.) Probar que la ecuación $\int_0^x e^{t^2} dt = 1$ tiene solución única en el intervalo $[0, 1]$. Justifique.

b) (1,0 pto.) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase \mathcal{C}^2 (dos veces derivable con derivada continua) tal que $|f(0)| \leq M$, $|f(2)| \leq M$ y $|f''(x)| \leq K$, $\forall x \in [0, 2]$ donde $K, M \in \mathbb{R}^+$ fijos. Demuestre que $|f'(0)| \leq M + K$.

Indicación: Use un desarrollo de Taylor para f .

P3. Sean $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ integrable y $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(i) (1,5 ptos.) Probar que si f es continua en 0, entonces F es continua en \mathbb{R} .

(ii) (1,5 ptos.) Probar que si f es continua en \mathbb{R} y derivable en 0, entonces F es derivable en \mathbb{R} y además $F'(0) = \frac{1}{2}f'(0)$.

P4. (2,0 ptos.) Sea f una función no negativa y continua en $[0, \infty]$. Para cada $x \geq 0$ se considera el sólido cuya base es la región limitada por el gráfico de f y el eje OX en el intervalo $[0, x]$ y tal que las secciones del sólido perpendiculares al eje OX son cuadrados. Sabiendo que el volumen de dicho sólido está dado por:

$$V(x) = x^3 - 2x \cos(x) + (2 - x^2) \sin(x)$$

se pide obtener la función $f(x)$.

P5. (i) (1,5 ptos.) Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de términos positivos. Demuestre que si la serie $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{1 + a_n}$ converge, entonces $\sum_{n \geq 0} a_n$ converge.

(ii) (1,5 ptos.) Sabiendo que la función $f(x) = \frac{\sqrt[3]{e}-1}{x}$ es decreciente en $[1, \infty]$, estudie la convergencia de la integral $\int_1^\infty f(x) dx$ y de la serie $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{1/n}-1}{n}$.

P6. (2,0 ptos.) Considere la curva Γ parametrizada por:

$$r(t) = e^{-2t}(\cos(2t), \sin(2t), 1) \quad \text{donde } t \in [0, \infty].$$

Encuentre los vectores tangente \hat{T} , normal \hat{N} y el largo total de la curva Γ . ¿Qué puede decir de la torsión τ de Γ para $t \in [0, \infty]$?

P7. Considere la serie de potencias $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{ne^n}$.

- (i) (1,0 pto.) Calcule el radio de convergencia y el intervalo de convergencia, investigando los extremos.
- (ii) (1,0 pto.) Demuestre que $f'(x) = \frac{1}{e-x}$.

Indicación: Recuerde que $\sum_{n \geq 0} q^n = \frac{1}{1-q}$, $|q| < 1$.

- (iii) (1,0 pto.) Determine $f(x)$ y utilícelo para calcular $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n2^n}$.

30 de noviembre de 2009

Sin consultas

Tiempo: 3:00 hrs.

Universidad de Chile.
 Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
 Escuela de Ingeniería.

MA1002-04 Cálculo Diferencial E Integral

Pauta No Oficial Exámen 2009/02

Profesor: Raul Gormaz A.

Auxiliares: Sergio Castillo J. y Carlos Duarte C.

Semestre Primavera 2009

Fecha: 07 de diciembre de 2009

P1.- En un cuadrado de lado $2a$ se inscriben dos circunferencias de radios r_1 y r_2 , centradas en la diagonal del cuadrado, tangentes entre sí y ambas tangentes al cuadrado (ver figura)

(i) Demuestre que $r_1 + r_2 = \frac{4a}{2+\sqrt{2}}$.

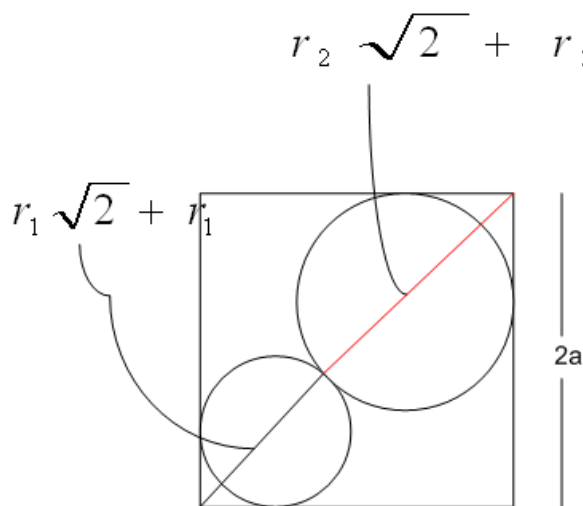


Figura 1: Pregunta 1

(ii) Determine los valores de r_1 y r_2 de modo que la suma de las áreas de ambos círculos sea máxima. Justifique.

Solución:

(i) De la figura, la diagonal del cuadrado de lado $2a$ es igual a la suma de las dadas por las líneas negra y roja, luego:

$$\begin{aligned}(r_1\sqrt{2} + r_1) + (r_2\sqrt{2} + r_2) &= 2a\sqrt{2} \\ (\sqrt{2} + 1)(r_1 + r_2) &= 2a\sqrt{2} \\ r_1 + r_2 &= \frac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1}\end{aligned}$$

Multiplicando por $\sqrt{2}$ arriba y abajo, se tiene:

$$r_1 + r_2 = \frac{4a}{2 + \sqrt{2}} \quad (1)$$

(ii) Cabe notar que sin pérdida de generalidad $r_1 \in [0, a]$. Por otra parte el área es:

$$A(r_1, r_2) = \pi(r_1^2 + r_2^2)$$

Utilizando la ecuación (1), ya que debemos dejar el área en función de una variable, así:

$$A(r_1) = \pi(r_1^2 + (b - r_1)^2) \quad b = \frac{4a}{2 + \sqrt{2}}$$

Derivando e igualando a 0:

$$A'(r_1) = 2\pi(2r_1^* - b) = 0 \Leftrightarrow r_1^* = \frac{b}{2} = \frac{2a}{2 + \sqrt{2}}$$

Y como

$$A''(r_1) = 4\pi > 0$$

Implica que r_1^* se trata de un mínimo, pero como buscamos un máximo, éste se alcanza en virtud del teorema de Weierstrass, ya que la función es continua en un intervalo cerrado, luego el máximo lo alcanza en el extremo, esto es $r_1 = a$ y de (1) $r_2 = a(3 - 2\sqrt{2})$, lo que el área máxima es:

$$A_{max} = \pi a^2((3 - 2\sqrt{2})^2 + 1^2) = 6\pi a^2(3 - 2\sqrt{2})$$

P2.-

a) Probar que la ecuación $\int_0^x e^{t^2} dt = 1$ tiene solución única en el intervalo $[0, 1]$

b) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 (dos veces derivable con derivada continua) tal que $|f(0)| \leq M, |f(2)| \leq M$ y $|f''(x)| \leq K, \forall x \in [0, 2]$ donde $K, M \in \mathbb{R}^+$ fijos. Demuestre que $|f'(0)| \leq M + K$. Indicación: Use un desarrollo de Taylor para f .

Solución:

a) Sea $f(x) = \int_0^x e^{t^2} dt - 1$ que es continua por álgebra de funciones y el teorema fundamental del cálculo en el compacto $[0, 1]$. Vemos que $f(0) = -1$ y $f(1) = \int_0^1 e^{t^2} dt - 1 \geq \int_0^1 e^0 dt - 1 = 1 - 1 = 0$, luego por teorema de Bolzano f es continua y $f(0) \cdot f(1) \leq 0$, implica que $\exists c \in [0, 1]$ tal que $f(c) = 0$ y como $f'(x) = e^{x^2} > 0$ implica que la función es estrictamente creciente, luego la raíz c es única.

b) Como la función es de clase 2 luego hacemos un desarrollo de Taylor de orden dos (en torno a 0):

$$f(x) = f(0) + f'(x)x + \frac{f''(\xi)x^2}{2} \quad \xi \in [0, 2]$$

Así en $x = 2$:

$$f(2) = f(0) + 2f'(0) + 2f''(\xi) \quad \xi \in [0, 2]$$

Despejando $f'(0)$ y aplicando valor absoluto y desigualdad triangular:

$$|f'(0)| = \frac{1}{2}|f(2) - f(0) - 2f''(\xi)| \leq \frac{1}{2}|f(2)| + \frac{1}{2}|f(0)| + |f''(\xi)| \leq \frac{M}{2} + \frac{M}{2} + K = M + K$$

P3.- Sean $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ integrable y $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- (i) Probar que si f es continua en 0, entonces F es continua en \mathbb{R} .
(ii) Probar que si f es continua en \mathbb{R} y derivable en 0, entonces F es derivable en \mathbb{R} y además $F'(0) = \frac{1}{2}f'(0)$.

Solución:

- (i) Por teorema fundamental del cálculo y álgebra de funciones $\frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt$ es continua si $x \neq 0$, nos basta ver la continuidad en $x = 0$, luego para reparar la función, se tiene que

$$F(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt$$

Aplicando el TFC y la regla de L'Hôpital, se tiene:

$$F(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

Luego F es continua en \mathbb{R} .

- (ii) Como f es continua en \mathbb{R} y derivable en 0, luego existe $f'(0)$, por definición:

$$F'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt - f(0)}{x}$$

Nuevamente aplicando el TFC y la regla de L'Hôpital, se tiene:

$$F'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) - \int_0^x f(t)dt}{x^2}$$

El límite anterior es de la forma $\frac{0}{0}$, así que usamos regla de L'Hôpital y TFC:

$$F'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf'(x) + f(x) - f(x)}{2x} = \frac{1}{2}f'(0)$$

luego F es derivable en $x = 0$ y en general en \mathbb{R} ya que es producto de funciones derivables para el caso $x \neq 0$.

P4.- Sea f una función no negativa y continua en $[0, \infty)$. Para cada $x \geq 0$ se considera el sólido cuya base es la región limitada por el gráfico de f y el eje OX en el intervalo $[0, x]$ y tal que las secciones del sólido perpendiculares al eje OX son cuadrados. Sabiendo que el volumen de dicho sólido está dado por:

$$V(x) = x^3 - 2x \cos(x) + (2 - x^2) \sin(x)$$

se pide obtener la función $f(x)$.

Solución:

Como el volumen se calcula integrando los cuadrados que se forman, tenemos lo siguiente:

$$V(x) = \int_0^x y^2 dt = \int_0^x f^2(t)dt$$

Luego, aplicando el TFC:

$$V'(x) = f^2(x) \quad f(0) = 0$$

Así:

$$f(x) = \sqrt{V'(x)} = \sqrt{3x^2 - x^2 \cos(x)} = x\sqrt{3 - \cos(x)}$$

Ojo que se cumple que $f(0) = 0$.

P5.-

(i) Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de términos positivos. Demuestre que si la serie $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{1+a_n}$ converge, entonces $\sum_{n \geq 0} a_n$ converge.

(ii) Sabiendo que la función $f(x) = \frac{\sqrt[3]{e}-1}{x}$ es decreciente en $[1, \infty)$ estudie la convergencia de la integral $\int_1^\infty f(x)dx$ y de la serie $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{1/n}-1}{n}$

Solución:

(i) Sea $b_n = \frac{a_n}{1+a_n}$ y utilizamos comparación al límite, es decir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a_n) = 1 \neq 0$$

Ya que como $b_n \rightarrow 0 \Rightarrow a_n \rightarrow 0$, pues es convergente la serie $\sum_{n \geq 0} b_n$. Y como el límite es distinto de 0, $\sum_{n \geq 0} a_n$ converge.

(ii) Como $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}$ es convergente (de hecho vale 1), comparamos al límite con $f(x) = \frac{\sqrt[3]{e}-1}{x}$, y sea $g(x) = \frac{1}{x^2}$, luego calculamos:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = 1 \neq 0$$

Así $\int_1^\infty f(x)dx$ es convergente, y como f es decreciente y no negativa en $[1, \infty)$ la serie también converge.

P6.- Considere la curva Γ parametrizada por:

$$r(t) = e^{-2t}(\cos(2t), \sin(2t), 1) \quad t \in [0, \infty)$$

Encuentre los vectores tangente \hat{T} , normal \hat{N} y el largo total de la curva Γ .

Solución:

$$r'(t) = (2e^{-2t}(-\cos(2t) - \sin(2t)), 2e^{-2t}(\cos(2t) - \sin(2t)), -2e^{-2t})$$
$$\|r'(t)\| = 2\sqrt{3}e^{-2t}$$

$$\hat{T}(t) = \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-\cos(2t) - \sin(2t), \cos(2t) - \sin(2t), -1)$$

Derivando el vector tangente, se tiene:

$$\frac{d\hat{T}(t)}{dt} = \frac{2}{\sqrt{3}}(\sin(2t) - \cos(2t), -\sin(2t) - \cos(2t), 0)$$

Dividiendo por la norma (que es $\frac{2\sqrt{6}}{3}$), luego:

$$\hat{N}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin(2t) - \cos(2t), -\sin(2t) - \cos(2t), 0)$$

Finalmente la longitud total está dada por:

$$L = \int_0^{\infty} \|r'(t)\| dt = 2\sqrt{3} \int_0^{\infty} e^{-2t} dt = -\sqrt{3}e^{-2t}|_0^{\infty} = \sqrt{3}$$

P7.- Considere la serie de potencias

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{ne^n}$$

- (i) Calcule el radio de convergencia y el intervalo de convergencia, investigando los extremos.
- (ii) Demuestre que $f'(x) = \frac{1}{e-x}$. Ind: Recuerde que $\sum_{n \geq 0} q^n = \frac{1}{1-q}$ $|q| < 1$
- (iii) Determine $f(x)$ y utilícelo para calcular $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n2^n}$

Solución:

- (i) El intervalo de convergencia está dado por la condición:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{x^n}{ne^n} \right|} < 1 \Rightarrow |x| < e$$

Lo que implica que el intervalo de convergencia es inicialmente $(-e, e)$, de donde se deduce que el radio de convergencia es $R = e$, investiguemos los extremos:

$x = -e$ la serie que resulta es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

la cual es convergente por el criterio de Leibniz, pues la serie es alternante y $\frac{1}{n}$ converge a 0. $x = e$ resulta la serie armónica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

que es divergente. Así el intervalo de convergencia $I = [-e, e)$.

- (ii) Derivando $f(x)$, tenemos que:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{e^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{e^{n+1}} = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{e}\right)^n$$

Asociando la serie geométrica tenemos que (ya que estamos trabajando en el intervalo de convergencia):

$$f'(x) = \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{e}} = \frac{1}{e-x}$$

- (iii) Integrando $f(x)$ tenemos: $f(x) = -\ln|e-x| + C$, pero $f(0) = 0$, lo que implica que:

$$f(0) = -\ln(e) + C \Leftrightarrow C = 1$$

Luego

$$f(x) = \ln|e-x| + 1 \quad \forall x \in I$$

Para calcular la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n2^n}$, vemos que tomando $x = -\frac{e}{2}$ en la serie original (que de hecho está en el intervalo de convergencia). Tenemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n2^n} = f\left(-\frac{e}{2}\right) = -\ln\left|e + \frac{e}{2}\right| + 1 = \ln\left(\frac{2}{3}\right)$$