SOLUCIÓN APUNTE MA1002
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL
SEMANA 14

Autor: Nicolás Igor Tapia Rivas

Use este material con responsabilidad.

E1. Vamos a separar las fracciones. Note que resultan ser todas telescópicas.

a)

$$\begin{aligned}
\frac{4}{(4k-3)(4k+1)} &= \frac{(4k+1)-(4k-3)}{(4k-3)(4k+1)} \qquad k \geq 0 \\
&= \frac{1}{4k-3} - \frac{1}{4k+1} = \frac{1}{4(k-1)+1} - \frac{1}{4k+1} \\
\sum \frac{4}{(4k-3)(4k+1)} &= \sum \frac{1}{4(k-1)+1} - \frac{1}{4k+1} = \lim\left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{4n+1}\right) = -\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} &= \frac{(k+1)^2-k^2}{k^2(k+1)^2} \qquad k \geq 1 \\
&= \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \\
\sum \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} &= \sum \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} = \lim\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = 1
\end{aligned}$$

c)

$$\sum \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}\sqrt{k}} = \sum \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} = \lim\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = 1$$

E2. Usaremos la contrarrecíproca del teorema 8.2

$$(a_n) \text{ no converge a cero } \Rightarrow \sum a_k \text{ diverge}$$

a) $a_n = n^2$ diverge, luego $\sum a_k$ diverge.

b)
$$a_n = n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{1/n} \to 1 \quad \text{(límite conocido)}$$

Luego $\sum a_k$ diverge.

c)
$$a_n = n \sin\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{1/n} \to 1 \quad \text{(límite conocido)}$$

Luego $\sum a_k$ diverge.

d)
$$\underbrace{a_n = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n \to \exp(a)}_{\text{Definición de función exponencial}}$$

Pero $\exp(a) > 0, \ \forall a \in \mathbb{R}$, luego $\sum a_k$ diverge.

E3.

a) Notemos que $A = \sum \frac{1}{2^k}$ y $B = \sum \frac{1}{3^k}$ son conocidamente convergentes (puesto que tanto $1/2$ como $1/3$ son menores que 1, y $\sum q^k$ converge ssi $|q| < 1$). Luego

$$\sum \left(\frac{5}{2^k} + \frac{1}{3^k}\right) = 5A + B$$

Es también convergente por ser combinación lineal de series convergentes.

b) Como $a_n = (1/5)^n$ es decreciente con $a_n \to 0$, por Leibnitz tenemos que

$$A = \sum \frac{(-1)^k}{5^k} \text{ converge}$$

Además, $B = \sum (1/2)^k$ es conocidamente convergente. Luego

$$\sum \left(\frac{1}{2^k} + \frac{(-1)^k}{5^k}\right) = B + A$$

Es también convergente por ser combinación lineal de series convergentes.

E4.

a) Tenemos que $\sum(\frac{2}{3})^k$ converge pues $\frac{2}{3} < 1$. Además

$$\frac{|\cos(4^k)|}{3^k} \leq \frac{1}{3^k}$$

Y como $\sum(\frac{1}{3})^k$ converge, tenemos que $\sum \frac{\cos(4^k)}{3^k}$ converge absolutamente y por lo tanto converge. Finalmente, por álgebra de series

$$\sum \frac{2^k + \cos(4^k)}{3^k} = \sum \left(\frac{2}{3}\right)^k + \sum \frac{\cos(4^k)}{3^k} \text{ converge.}$$

b) Cuando $k \in \mathbb{N}$, $\tan(\frac{1}{k}) > 0$, luego

$$a_k = \frac{1}{e^k + \tan(\frac{1}{k})} \leq \frac{1}{e^k}$$

Donde $\sum \frac{1}{e^k}$ converge $\Rightarrow \sum a_k$ converge por mayoración.

c) Es intuitivo ver que, cuando n crece mucho, $a_n = \frac{n+1}{n^2+1}$ se va pareciendo mucho a $\frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$. En efecto

$$\text{lím} \frac{\frac{n+1}{n^2+1}}{\frac{1}{n}} = \text{lím} \frac{n^2+n}{n^2+1} = 1 > 0$$

Luego, por comparación, como $\sum \frac{1}{k}$ diverge, $\sum a_k$ también.

d) Recordemos que $\ln(k) \leq k - 1$, con lo que:

$$a_k = \frac{k + \ln(k)}{k^3} \leq \frac{k + k - 1}{k^3} = \frac{2k-1}{k^3} \leq 2\frac{1}{k^2}$$

Como $\sum \frac{1}{k^2}$ converge, se tiene que $\sum a_k$ también.

E5. Recordemos que $\sum a_k$ converge $\Rightarrow (a_n) \to 0$. Tenemos por comparación que

$$\text{lím} \frac{a_k^2}{a_k} = \text{lím}\, a_k = 0$$

Luego $\sum a_k$ converge $\Rightarrow \sum a_k^2$ converge.

E6. Procederemos por comparación.

a) Nos serviremos de un límite conocido.

$$\lim \frac{\sin(k^{-2})}{k^{-2}} = 1 > 0$$

Luego, $\sum k^{-2}$ converge $\Rightarrow \sum \sin k^{-2}$ también.

b) Nos serviremos de un límite conocido.

$$\lim \frac{\ln(k^{-2}(k^2+1))}{k^{-2}} = \lim \frac{\ln(1+k^{-2})}{k^{-2}} = 1 > 0$$

Luego, $\sum k^{-2}$ converge $\Rightarrow \sum \ln(k^{-2}(k^2+1))$ también.

c) Notemos primero que, cuando n crece mucho, $a_n = (\sqrt{n}(1+\sqrt{n}))^{-1}$ se va pareciendo mucho a $(\sqrt{n}\sqrt{n})^{-1} = n^{-1}$. En efecto

$$\lim \frac{(\sqrt{k}(1+\sqrt{k}))^{-1}}{k^{-1}} = \lim \frac{k}{k+\sqrt{k}} = \lim \frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{k}}} = 1 > 0$$

Luego, $\sum k^{-1}$ diverge $\Rightarrow \sum a_k$ también.

d) Nos serviremos del límite conocido para $\sin(x)$.

$$\lim \frac{\tan(k^{-2})}{k^{-2}} = \lim \left(\frac{\sin(k^{-2})}{k^{-2}}\right) \frac{1}{\cos(k^{-2})} = 1 > 0$$

Luego, $\sum k^{-2}$ converge $\Rightarrow \sum \tan(k^{-2})$ también.

e) Nos serviremos de un límite conocido.

$$\lim \frac{(k(k)^{1/k})^{-1}}{k^{-1}} = \lim \frac{1}{k^{1/k}} = \lim \sqrt[k]{\frac{1}{k}} = 1 > 0$$

Luego, $\sum k^{-1}$ diverge $\Rightarrow \sum (k(k)^{1/k})^{-1}$ también.

f)

$$\sqrt{k^2+k} - k = \frac{(k^2+k)-k^2}{\sqrt{k^2+k}+k} = \frac{k}{\sqrt{k^2+k}+k} = \frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{k}}} \to \frac{1}{2}$$

Luego, como no converge a cero, $\sum \sqrt{k^2+k} - k$ diverge.

E7. Para $\sum \frac{a_k}{1+a_k}$, como $a_k \geq 0$, basta notar que $\frac{a_k}{1+a_k} \leq a_k$ y recordar que $\sum a_k$ converge, por lo que se tiene la convergencia por mayoración.
Para $\sum \frac{a_k}{1-a_k}$, recordemos que la convergencia de $\sum a_k$ implica que $a_k \to 0$. Luego, por comparación por cuociente tenemos:

$$\lim \frac{\frac{a_k}{1-a_k}}{a_k} = \lim \frac{1}{1-a_k} = 1 > 0$$

Luego, $\sum a_k$ converge $\Rightarrow \sum \frac{a_k}{1-a_k}$ también.

E8. Procedamos por el criterio de la raíz n-ésima.

a)

$$\lim \left(\frac{1}{e^{\sqrt{k^2+k}}}\right)^{1/k} = \lim \frac{1}{e^{\sqrt{1+\frac{1}{k}}}} = \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow \text{ converge.}$$

b)

$$\lim \left(q^k k^\alpha\right)^{1/k} = \lim q(\sqrt[k]{k})^\alpha = q \cdot 1^\alpha = q < 1 \Rightarrow \text{ converge.}$$

c)

$$\lim \left(\frac{a^k}{k^k}\right)^{1/k} = \lim \frac{a}{k} = 0 < 1 \Rightarrow \text{ converge.}$$

E9.

a)

$$\left|\frac{\cos(k^k)}{k^2}\right| \leq \frac{1}{k^2} \text{ que converge, luego } \sum \left|\frac{\cos(k^k)}{k^2}\right| \text{ converge.}$$

b)

$$\left|(-1)^k \frac{1}{k^\alpha}\right| = \frac{1}{k^\alpha} \text{ conocidamente convergente para } \alpha > 1.$$

c)

$$\left|(-1)^k \frac{(k!)^2}{(2k)!}\right| = \frac{(k!)^2}{(2k)!} = a_k$$

Veamos por criterio de cuociente.

$$\lim \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim \frac{((k+1)!)^2}{(2k+2)!} \cdot \frac{(2k)!}{(k!)^2} = \lim \frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+2)} = \lim \frac{k+1}{4k+2} = \frac{1}{4} < 1$$

Luego a_k converge y por ende $\sum (-1)^k \frac{(k!)^2}{(2k)!}$ es absolutamente convergente.

E10. Usando el criterio de la raíz n-ésima, tenemos:

$$\lim |a^k k^a|^{1/k} = \lim |a|(\sqrt[k]{k})^a = |a| \cdot 1^a = |a|$$

De donde

$$|a| < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum |a^k k^a| \text{ converge.}$$
$$|a| > 1 \quad \Rightarrow \quad \sum |a^k k^a| \text{ diverge.}$$

Para el caso $|a| = 1$ tenemos que $\sum |a^k k^a| = \sum k^a$, que diverge tanto para $a = 1$ como para $a = -1$. Luego, $\sum a^k k^a$ converge absolutamente solamente para $a \in (-1, 1)$.

E11. Es aplicación directa del criterio de Leibnitz. En efecto:

a) Es inmediato que $a_k = \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} \to 0$. Además,

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k+2}} \leq \frac{\sqrt{k+1}+\sqrt{k+1}}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k+1}} = 1 \Rightarrow a_{k+1} \leq a_k$$

Luego, como a_k converge a cero y es decreciente, por Leibnitz $\sum(-1)^k a_k$ converge.

b) Análogamente al anterior, $a_k = \sin(1/k) \to 0$ y

$$\frac{d}{dx}\sin(1/x) = \frac{-\cos(1/x)}{x^2}$$

Expresión negativa cuando $x \geq 1$, con lo que $\sin(1/x)$ decrece para esos valores de x. Luego, a_k decrece, y por Leibnitz $\sum(-1)^k a_k$ converge.

P1.

a) El Hint debería decir (se invita a confirmarlo simplemente separando en fracciones parciales):

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2(k+2)}$$

Siguiendo con la resolución del problema, basta notar que:

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} \leq \frac{1}{k^3}$$

Donde $\sum \frac{1}{k^3}$ es conocidamente convergente. Luego nuestra serie es convergente, y para calcular su valor notemos que (usando el Hint):

$$\begin{aligned} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \frac{1}{2k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2(k+2)} \\ &= \frac{1}{2k} - \left(\frac{1}{2(k+1)} + \frac{1}{2(k+1)}\right) + \frac{1}{2(k+2)} \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1}\right)\right] \end{aligned}$$

Es decir, tenemos dos telescópicas. Se sigue entonces que:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{2}\right)\right]$$

Y tomando el límite se llega a:

$$\sum \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

b) Sea la serie $\sum \frac{e^k}{k^k}$. Por el criterio de la raíz n-ésima tenemos:

$$\text{lím} \left(\frac{e^n}{n^n}\right)^{1/n} = \text{lím}\, \frac{e}{n} = 0 < 1 \Rightarrow \sum \frac{e^k}{k^k} \text{ converge.}$$

Luego, por el criterio de la integral impropia, esto equivale a la convergencia de $\int_1^\infty \frac{e^y}{y^y}$.

c) Notemos en primer lugar que $\frac{2k+1}{k(k+1)} \to 0$. Además es decreciente. En efecto veamos que:

$$a_k - a_{k+1} = \frac{2k+1}{k(k+1)} - \frac{2k+3}{(k+1)(k+2)} = \frac{2k+2}{k(k+1)(k+2)} \geq 0 \Rightarrow a_k \geq a_{k+1}$$

Luego, por Leibnitz $\sum(-1)^k \frac{2k+1}{k(k+1)}$ converge. Veamos ahora la convergencia absoluta. Esto es, ver si $\sum \frac{2k+1}{k(k+1)}$ converge.

Note que cuando k crece mucho, $a_k = \frac{2k+1}{k(k+1)}$ se va pareciendo mucho a $\frac{2k}{k^2} = 2\frac{1}{k}$. En efecto, comparando tenemos que:

$$\text{lím} \frac{\frac{2k+1}{k(k+1)}}{1/k} = \text{lím} \frac{2k+1}{k+1} = 2 > 0$$

Luego, como $\sum 1/k$ diverge, se tiene que $\sum \frac{2k+1}{k(k+1)}$ también.
En conclusión,

$$\sum (-1)^k \frac{2k+1}{k(k+1)} \text{ es condicionalmente convergente.}$$

P2.

a) $(a1)$ Notemos que $e^{pn} > 0,\ \forall p \in \mathbb{R}$, por lo que podemos usar criterios para series de términos no negativos. Luego (*recuerde que e^p es una constante*):

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{e^{pn+p} n!}{e^{pn}(n+1)!} = \lim \frac{e^p}{n+1} = 0 < 1$$

Por lo tanto, por el criterio del cuociente, $\sum \frac{e^{pn}}{n!}$ converge $\forall p \in \mathbb{R}$.
$(a2)$ Notemos que:

$$\left(1 + \frac{10}{n}\right)^{n^2} = \left(\left(1 + \frac{10}{n}\right)^n\right)^n \leq (e^{10})^n = e^{10n}$$

Esto puesto que se vió en el curso anterior que, para $x \in \mathbb{R}$, la sucesión a_n dada por:

$$a_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Es convergente con límite e^x, correspondiente al supremo del conjunto:

$$A = \left\{ \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$$

Dicho esto, tenemos que:

$$\frac{\left(1 + \frac{10}{n}\right)^{n^2}}{n!} \leq \frac{e^{10n}}{n!}$$

Como vimos en la parte $(a1)$, tomando $p = 10$ se tiene que $\sum \frac{e^{10n}}{n!}$ converge, y por lo tanto

$$\sum \frac{\left(1 + \frac{10}{n}\right)^{n^2}}{n!} \text{ converge por mayoración.}$$

b)

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x), \qquad x \geq 0$$

$(b1)$ Es fácil ver que $f(n) \to 0$, puesto que $\arctan(n) \to \frac{\pi}{2}$. Veamos que $f(n)$ es decreciente:

$$f(n) - f(n+1) = \arctan(n+1) - \arctan(n)$$

Pero $\arctan(x)$ es creciente. Luego $\arctan(n+1) - \arctan(n) \geq 0 \Rightarrow f(n) \geq f(n+1)$. Es decir, $f(n)$ es decreciente. Por el criterio de Leibnitz se concluye que:

$$\sum (-1)^n f(n) \text{ converge.}$$

$(b2)$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} x f(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan(x)}{\frac{1}{x}} \\ &\xrightarrow{L'H} \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1 \end{aligned}$$

Veamos que $\sum(-1)^n f(n)$ no converge absolutamente. Se tiene que $|(-1)^n f(n)| = f(n)$, y por comparación tenemos:

$$\lim \frac{f(n)}{1/n} = \lim n f(n) = 1 > 0$$

Luego, como $\sum 1/n$ diverge, tenemos que $\sum |(-1)^n f(n)| = \sum f(n)$ diverge, por lo que $\sum(-1)^n f(n)$ no converge absolutamente.

P3.

a) Por el criterio de la raíz n-ésima, tenemos que

$$\begin{aligned}\lim \left(\left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2}\right)^{1/k} &= \lim \left(\frac{k}{k+1}\right)^k = \lim \frac{1}{\left(\frac{k+1}{k}\right)^k} \\ &= \lim \frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k} = \frac{1}{e} < 1\end{aligned}$$

Luego

$$\sum \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2} \text{ converge.}$$

b) Veamos que $\sqrt{(k-1)!} = \sqrt{1}\sqrt{2}\ldots\sqrt{k-1}$. Esto lo abreviamos como:

$$\sqrt{(k-1)!} = \prod_{j=1}^{k-1} \sqrt{j}$$

Luego:

$$\frac{\sqrt{(k-1)!}}{\prod_{j=1}^{k}(1+\alpha\sqrt{j})} = \frac{\prod_{j=1}^{k-1}\sqrt{j}}{(1+\alpha\sqrt{k})\left(\prod_{j=1}^{k-1}(1+\alpha\sqrt{j})\right)} = \frac{1}{1+\alpha\sqrt{k}}\left(\prod_{j=1}^{k-1}\frac{\sqrt{j}}{1+\alpha\sqrt{j}}\right)$$

Como se cumple que

$$\frac{1}{1+\alpha\sqrt{k}} \leq 1 \qquad \frac{\sqrt{j}}{1+\alpha\sqrt{j}} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{j}}+\alpha} \leq \frac{1}{\alpha}$$

Tenemos el siguiente acotamiento:

$$\frac{\sqrt{(k-1)!}}{\prod_{j=1}^{k}(1+\alpha\sqrt{j})} \leq \prod_{j=1}^{k-1}\frac{1}{\alpha} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{k-1}$$

Gracias a que $\alpha > 1 \Rightarrow \frac{1}{\alpha} < 1$, tenemos que $\sum\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{k-1}$ converge. Finalmente, por mayoración de series se concluye que:

$$\sum \frac{\sqrt{(k-1)!}}{\prod_{j=1}^{k}(1+\alpha\sqrt{j})} \text{ converge para } \alpha > 1.$$

c) Usando la indicación, demostraremos que $\arctan(x) \leq x,\ \forall x \geq 0$. Para ello sea la función

$$f(x) = \arctan(x) - x$$

Cuya derivada vale:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 = \frac{-x^2}{1+x^2} \leq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$$

Luego $f(x)$ es decreciente en todo $\mathbb{R}$. De ello se concluye que:

$$x \geq 0 \Rightarrow f(x) \leq f(0)$$

Pero (puesto que $f(0) = 0$) $f(x) \leq f(0)$ significa que $\arctan(x) - x \leq 0$. Luego hemos probado que

$$\arctan(x) \leq x,\ \forall x \geq 0$$

Usando esto tenemos que:

$$\arctan\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right) \leq \frac{1}{1+k+k^2} \leq \frac{1}{k^2}$$

Donde $\sum \frac{1}{k^2}$ es convergente. Se sigue finalmente que

$$\sum \arctan\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right) \text{ converge.}$$