SOLUCIÓN APUNTE MA1002
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL
SEMANA 11

Autor: Nicolás Igor Tapia Rivas

Use este material con responsabilidad.

P1. $\rho(\theta) = a(1 - \cos(\theta)) \quad , \; a > 0, \; \theta \in [0, 2\pi]$

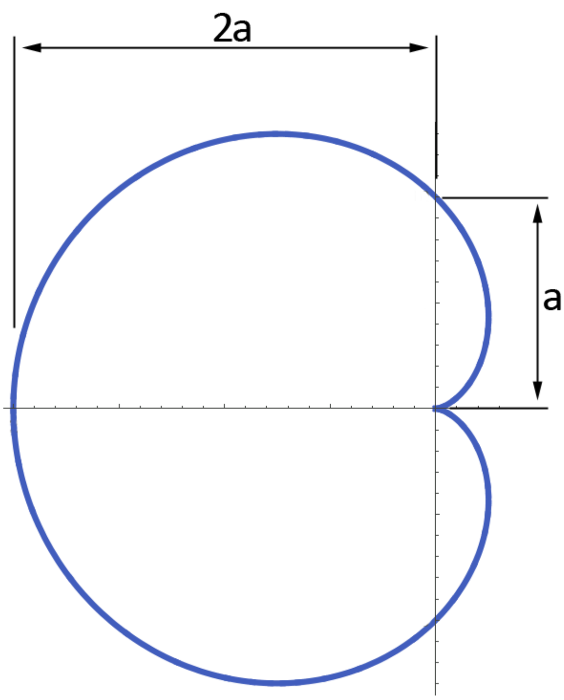
a) La parametrización inmediata es:

$$\begin{aligned} x &= \rho(\theta)\cos(\theta) \\ y &= \rho(\theta)\sin(\theta) \\ \Rightarrow \vec{r}(\theta) &= (\rho(\theta)\cos(\theta), \rho(\theta)\sin(\theta)) \\ \Rightarrow \vec{r}(\theta) &= a\begin{pmatrix} (1-\cos(\theta))\cos(\theta) \\ (1-\cos(\theta))\sin(\theta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Notemos que

$$\rho(0) = 0 \qquad \rho(\pi) = 2a \qquad \rho(2\pi) = 0$$
$$\rho(\pi/2) = a \quad \rho(3\pi/2) = a$$

Además, entre 0 y $\pi/2$, el coseno decrece desde 1 a 0, por lo que $\rho(\theta)$ crece de 0 a a. Luego, entre $\pi/2$ y π el coseno sigue decreciendo hacia los negativos, por lo que $\rho(\theta)$ sigue aumentando hasta $2a$. Después de esto, el comportamiento del coseno se invierte, por lo que $\rho(\theta)$ se *devuelve* desde $2a$, pasando por a en $\theta = 3\pi/2$, hasta $\rho(2\pi) = 0$.



Note que

$$\frac{d\vec{r}}{d\theta}(\theta) = a\begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\theta) - (1-\cos(\theta))\sin(\theta) \\ \sin^2(\theta) + (1-\cos(\theta))\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\frac{d\vec{r}}{d\theta}(\theta = 0) = \frac{d\vec{r}}{d\theta}(\theta = 2\pi) = 0$$

Por lo que en esos valores de θ existen irregularidades (esto es cuando la curva forma una *punta* en el origen).

b)

$$\begin{aligned}
\vec{r}(\theta) &= a((1-\cos(\theta))\cos(\theta), (1-\cos(\theta))\sin(\theta)) \\
\frac{d\vec{r}}{dt}(\theta) &= a(\sin(\theta)\cos(\theta) - (1-\cos(\theta))\sin(\theta), \sin^2(\theta) + (1-\cos(\theta))\cos(\theta)) \\
&= a(2\sin(\theta)\cos(\theta) - \sin(\theta), \cos(\theta) - (\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta))) \\
&= a(\sin(2\theta) - \sin(\theta), \cos(\theta) - \cos(2\theta)) \\
\left|\left|\frac{d\vec{r}}{dt}(\theta)\right|\right|^2 &= a^2((\sin(2\theta) - \sin(\theta))^2 + (\cos(\theta) - \cos(2\theta))^2) \\
&= a^2((\sin^2(2\theta) + \cos^2(2\theta)) + (\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)) - 2(\cos(2\theta)\cos(\theta) + \sin(2\theta)\sin(\theta))) \\
&= a^2(2 - 2\cos(2\theta - \theta)) = 2a^2(1-\cos(\theta)) \\
\left|\left|\frac{d\vec{r}}{dt}(\theta)\right|\right| &= a\sqrt{2}\sqrt{1-\cos(\theta)}
\end{aligned}$$

Luego

$$L(\Gamma) = \int_0^{2\pi} a\sqrt{2}\sqrt{1-\cos(\theta)}d\theta$$

Notemos que $1 - \cos(\theta) = (\cos^2(\theta/2) + \sin^2(\theta/2)) - (\cos^2(\theta/2) - \sin^2(\theta/2)) = 2\sin^2(\theta/2)$, por lo que la integral a calcular es:

$$L(\Gamma) = \int_0^{2\pi} a\sqrt{2}\sqrt{2\sin^2(\theta/2)}d\theta = 2a\int_0^{2\pi} |\sin(\theta/2)|d\theta$$

Pero $\theta \in [0, 2\pi]$, por lo que $\theta/2 \in [0, \pi]$ y $\sin(\theta/2) \geq 0$.

$$\begin{aligned}
L(\Gamma) &= 2a\int_0^{2\pi} \sin(\theta/2)d\theta \qquad , \ 2u = \theta \rightarrow 2du = d\theta \\
&= 4a\int_0^{\pi} \sin(u)du = 4a\cos(u)\Big|_{\pi}^{0} = 8a
\end{aligned}$$

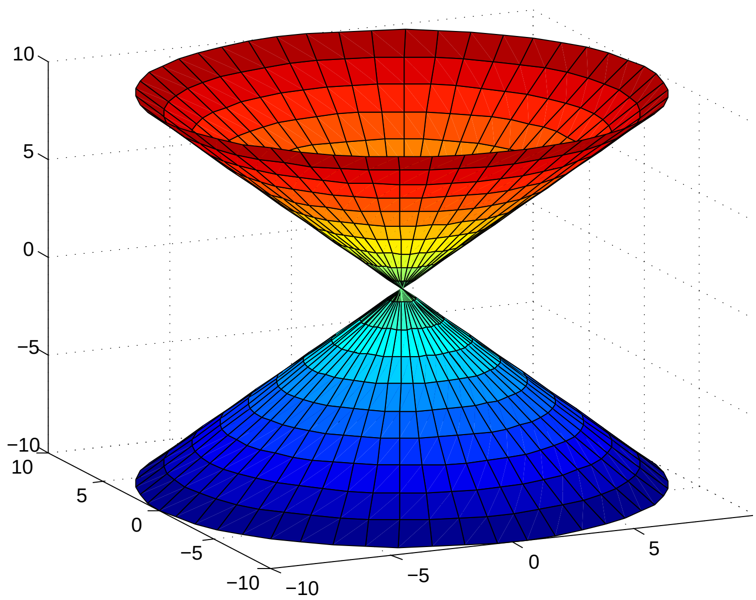
P2. Se nos entrega el cono de ecuación:

$$x^2 + y^2 = z^2$$

A modo de facilitar la visualización de la forma de este cono, note que si fijamos el valor de la altura en $z = z_0$, entonces obtenemos una ecuación de la forma $x^2 + y^2 = z_0^2$. Es decir, una circunferencia centrada en el eje OZ, de radio z_0 y a una altura z_0. En definitiva, si nos acercamos al origen a través del eje OZ *desde arriba*, el radio de nuestras circunferencias dibujadas centradas en el eje OZ irá disminuyendo conforme disminuye la altura hasta que, justo en el origen, tengamos la ecuación para $z = 0$:

$$x^2 + y^2 = 0$$

Cuya única solución es $x = y = 0$, es decir, *en* $z = 0$ *el cono contiene solo al origen*. Esto último nos dice que en el origen se encuentra el vértice de nuestro cono. Como la ecuación $x^2 + y^2 = z^2$ es totalmente simétrica para los ejes, si nos acercamos a través del eje OZ *desde abajo* tendremos otro cono de orientación opuesta que se encuentra en el origen con el que ya analizamos.



a) La relación entre la altura z y el ángulo θ en el enunciado sugiere realizar una parametrización en coordenadas cilíndricas. Supongamos, pues, que la partícula P se encuentra en:

$$\vec{r}(\rho, \theta, z) = (\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta), z)$$

Debido a que la partícula P se encuentra en el cono de ecuación $x^2 + y^2 = z^2$, se debe cumplir que:

$$(\rho\cos(\theta))^2 + (\rho\sin(\theta))^2 = z^2 \Rightarrow \rho = |z|$$

Lo último puesto que $\rho \in [0, \infty)$. Además, nos dicen que $z = e^{-\theta}$, con $\theta \in [0, \infty)$, por lo que en resumen:

$$\rho = |z| = e^{-\theta} \qquad z = e^{-\theta}$$

Y por lo tanto se tiene la parametrización:

$$\vec{r}(\theta) = (e^{-\theta}\cos(\theta), e^{-\theta}\sin(\theta), e^{-\theta}) \qquad \theta \in [0, \infty)$$

Note en primer lugar que $z = e^{-\theta}$ nos dice que la componente z de la partícula nunca será negativa y por lo tanto la partícula se mueve en el cono superior (el que está en la parte positiva del eje OZ). Note también que mientras θ aumenta, es decir, mientras la partícula gira en torno al eje OZ, $z = e^{-\theta}$ disminuye, desde una amplitud máxima para $\theta = 0$, $z_0 = e^0 = 1$. Este comportamiento nos dice que la partícula describe una espiral hacia el origen. Note, por último, que z nunca será nulo puesto que la exponencial que la define nunca se anulará. En definitiva, la partícula bajará en espiral indefinidamente, sin llegar nunca a tocar el origen.

b) Recordemos que $\vec{r}(\theta) = (e^{-\theta}\cos(\theta), e^{-\theta}\sin(\theta), e^{-\theta})$, por lo que obtenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{r}}{dt}(\theta) &= (-e^{-\theta}\cos(\theta) - e^{-\theta}\sin(\theta), -e^{-\theta}\sin(\theta) + e^{-\theta}\cos(\theta), -e^{-\theta}) \\
&= -e^{-\theta}(\cos(\theta) + \sin(\theta), \sin(\theta) - \cos(\theta), 1) \\
\left|\left|\frac{d\vec{r}}{dt}(\theta)\right|\right|^2 &= e^{-2\theta}((\cos(\theta) + \sin(\theta))^2 + (\sin(\theta) - \cos(\theta))^2 + 1) \\
&= e^{-2\theta}(2(\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)) + 1) = 3e^{-2\theta} \\
\left|\left|\frac{d\vec{r}}{dt}(\theta)\right|\right| &= e^{-\theta}\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Y finalmente, podemos interpretar el largo total de la curva como el límite de la longitud de la curva hasta θ cuando θ tiende a ∞, si es que existe.

$$\begin{aligned}
L(\Gamma) &= \lim_{\theta\to\infty} \int_0^\theta e^{-t}\sqrt{3}dt \\
&= \lim_{\theta\to\infty} e^{-t}\sqrt{3}\Big|_\theta^0 = \lim_{\theta\to\infty} \sqrt{3}(1 - e^{-\theta}) = \sqrt{3}
\end{aligned}$$

c) Recordemos que

$$\vec{r}(\theta) = (e^{-\theta}\cos(\theta), e^{-\theta}\sin(\theta), e^{-\theta})$$
$$\left|\left|\frac{d\vec{r}}{dt}(\theta)\right|\right| = e^{-\theta}\sqrt{3}$$

Se tiene entonces que $s(\theta)$, la longitud de arco hasta θ, está dada por:

$$s(\theta) = \int_0^\theta e^{-t}\sqrt{3}dt = \sqrt{3}e^{-t}\Big|_\theta^0 = \sqrt{3}(1 - e^{-\theta})$$

Queremos encontrar $\theta(s)$, es decir, despejar a θ en función de s, para luego hacer:

$$\vec{r}(\theta) = \vec{r}(\theta(s)) = \vec{\sigma}(s)$$

Es decir, la parametrización natural. Luego:

$$\begin{aligned}
s &= \sqrt{3}(1 - e^{-\theta}) \\
\Rightarrow \theta &= -\ln\left(1 - \frac{s}{\sqrt{3}}\right)
\end{aligned}$$

Con lo que:

$$\vec{\sigma}(s) = \vec{r}\left(-\ln\left(1 - \frac{s}{\sqrt{3}}\right)\right)$$
$$\vec{\sigma}(s) = \left(\left(1 - \frac{s}{\sqrt{3}}\right)\cos\left(\ln\left(1 - \frac{s}{\sqrt{3}}\right)\right), \left(\frac{s}{\sqrt{3}} - 1\right)\sin\left(\ln\left(1 - \frac{s}{\sqrt{3}}\right)\right), \left(1 - \frac{s}{\sqrt{3}}\right)\right)$$

P3.

$$\vec{r}(t) = (\sin(t), \cos(t) + \ln(\tan(t/2)))$$
$$\dot{\vec{r}}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}(t) = \left(\cos(t), -\sin(t) + \frac{\sec^2(t/2)}{2\tan(t/2)}\right)$$

Notemos que:

$$\frac{\sec^2(t/2)}{2\tan(t/2)} = \frac{\cos(t/2)}{2\sin(t/2)\cos^2(t/2)} = (2\sin(t/2)\cos(t/2))^{-1} = \frac{1}{\sin(t)}$$

Luego

$$\dot{\vec{r}}(t) = \left(\cos(t), -\sin(t) + \frac{1}{\sin(t)}\right) = \cos(t)(1, \cot(t))$$
$$||\dot{\vec{r}}(t)||^2 = \cos^2(t)(1 + \cot^2(t))$$

Tenemos que $\vec{r}(t)$ será regular si $||\dot{\vec{r}}(t)|| > 0$. Determinemos para qué valores de t se tienen irregularidades ($||\dot{\vec{r}}(t)|| = 0$). Veamos primero que:

$$||\dot{\vec{r}}(t)|| = 0 \Leftrightarrow ||\dot{\vec{r}}(t)||^2 = 0 \Leftrightarrow \cos^2(t)(1 + \cot^2(t)) = 0$$

Pero $(1 + \cot^2(t))$ es siempre positivo, por lo que habrá irregularidades solamente cuando $\cos^2(t) = 0$, lo que con $t \in [0, \pi]$ se tiene solamente para $t = \pi/2$.

P4.

$$\begin{aligned}
\vec{r}(s) &= \left(a\cos\left(\frac{s}{c}\right), a\sin\left(\frac{s}{c}\right), \frac{bs}{c}\right) \\
\dot{\vec{r}}(s) &= \left(-\frac{a}{c}\sin\left(\frac{s}{c}\right), \frac{a}{c}\cos\left(\frac{s}{c}\right), \frac{b}{c}\right) \\
||\dot{\vec{r}}(s)||^2 &= \frac{a^2}{c^2}\sin^2\left(\frac{s}{c}\right) + \frac{a^2}{c^2}\cos^2\left(\frac{s}{c}\right) + \frac{b^2}{c^2} = \frac{1}{c^2}(a^2 + b^2)
\end{aligned}$$

Pero $c^2 = a^2 + b^2$, por lo que $||\dot{\vec{r}}(s)||^2 = 1 \Rightarrow ||\dot{\vec{r}}(s)|| = 1$. Sea ahora $\varphi(s)$ la función de longitud de arco desde 0 hasta s. Luego:

$$\varphi(s) = \int_0^s ||\dot{\vec{r}}(t)||dt = \int_0^s dt = t\Big|_0^s = s$$

Por lo que $\varphi(s) = s$, es decir, s es igual a la longitud de arco sobre Γ.