Control 3

P1. Estudie la convergencia de las siguientes integrales

i) (2,0 ptos.) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}}dx$

ii) (1,0 pto.) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{-x^4}}{1+x^4}dx$

ii) (3,0 ptos.) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\arctan x}{x^{3/2}}dx$

P2. a) (3,0 ptos.) Sea $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, diferenciable, con derivada continua en $\mathbb{R}$ y $f(0) = 1$. Si la longitud de la curva $y = f(x)$ entre 0 y x es igual a $e^x - f(x)$, determine $f(x)$.

b) Considere la región Ω encerrada entre la curva $f(x) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ y su asíntota horizontal.

i) (1,5 ptos.) Demuestre que el área de la región Ω existe y calcúlela.

ii) (1,5 ptos.) Averigüe si existe o no el volumen del sólido engendrado por la rotación de la región Ω en torno al eje OY.

P3. a) Sea la función $g : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ con $g'(t) > 0$, $\forall t \geq 1$ y $\lim\limits_{t\to\infty} g(t) = M \in \mathbb{R}^+$. Considere la parametrización de la curva $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^3$ dada por

$$r(t) = (\cos(g(t)),\ \operatorname{sen}(g(t)),\ 1).$$

i) (3,0 ptos.) Encuentre el largo total de Γ y los vectores T, N, B.

ii) (1,0 pto.) Calcule la curvatura $\kappa(t)$ y la torsión $\tau(t)$, $\forall t \in [1,\infty)$.

b) (2,0 ptos.) Dados $a, b, c > 0$ tales que $a^2 + b^2 = c^2$, sea $\gamma \subseteq \mathbb{R}^3$ la curva parametrizada por $r : [0, 2\pi c] \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$r(t) = \left(a\cos\left(\frac{t}{c}\right),\ a\operatorname{sen}\left(\frac{t}{c}\right),\ b\frac{t}{c}\right).$$

- Muestre que el parámetro t es la longitud de arco sobre γ.
- Pruebe que $T(s)$, vectores tangentes a γ, forman un ángulo constante con el vector $\hat{k}$ y que $N(s)$, vectores normales a γ, son ortogonales con el vector $\hat{k}$. ($\hat{k} = (0,0,1)$)

Justi que cada uno de sus pasos
Tiempo: 3:00

Control 3 MA1002 (2014-02)

Pauta Problema 1

i) $\int_0^1 \frac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}}\,dx$ es impropia de segunda especie (por 1^-) y puede, racionalizando, escribirse como $\int_0^1 \frac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}}\,dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-x}\,(1+\sqrt{x})}{1-x}\,dx = \int_0^1 \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$

(0.5) Comparando por cuociente con $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ donde $\lim_{x\to 1} \frac{\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}}{\frac{1}{\sqrt{1-x}}} = 2 \neq 0$

(1.5) y como $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ converge, $\int_0^1 \frac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}}\,dx$ CONVERGE.

ii) $\int_1^\infty \frac{e^{-x^4}}{1+x^4}\,dx$ es impropia de primera especie

(0.5) Comparando $\frac{e^{-x^4}}{1+x^4} \leq \frac{1}{1+x^4} \leq \frac{1}{x^4} \quad \forall x \in [1,\infty)$

Además, $\int_1^\infty \frac{dx}{x^4}$ es convergente $\left(\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha},\ \alpha = 4 > 1\right)$

(0.5) Por criterio de comparación se concluye que $\int_1^\infty \frac{e^{-x^4}}{1+x^4}\,dx$ CONVERGE.

iii) $\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x^{3/2}}\,dx$ es impropia mixta: $\underbrace{\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x^{3/2}}\,dx}_{2^{a}\ \text{Esp.}} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x^{3/2}}\,dx}_{1^{era}\ \text{Esp.}}$

(1.5) $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x^{3/2}}\,dx$ converge al comparar $\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\operatorname{arctg} x}{x^{3/2}}}{1/x^{1/2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} \underset{\text{L'Hopital}}{=} 1 \neq 0$

y como $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}}$ conv $\Rightarrow \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x^{3/2}}\,dx$ converge.

También $\int_1^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x^{3/2}}\,dx$ conv. al comparar $\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\operatorname{arctg} x}{x^{3/2}}}{1/x^{3/2}} = \lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} \neq 0$

(1.5) y $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{3/2}}$ conv. $\Rightarrow \int_1^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x^{3/2}}$ conv.

Así $\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x^{3/2}}\,dx$ CONVERGE.

Pauta Problema 2

a) La longitud de curva es $L=\int_0^x \sqrt{1+(f'(t))^2}\,dt$, así,

$\int_0^x \sqrt{1+(f'(t))^2}\,dt = e^x - f(x)$ y derivando, por T.F.C.

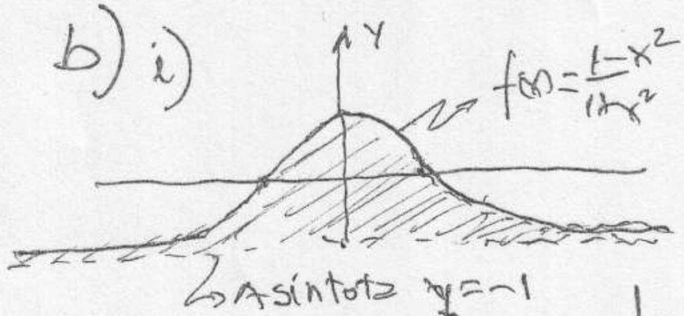
$$\sqrt{1+(f'(x))^2} = e^x - f'(x) \overset{(\ )^2}{\Longrightarrow} 1+\cancel{(f'(x))^2} = e^{2x} - 2e^x f'(x) + \cancel{(f'(x))^2}$$

2.0 $\Rightarrow f'(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{2e^x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{senh}(x)$

Integrando $\int_0^x f'(t)\,dt = \int_0^x \operatorname{senh}(t)\,dt \Rightarrow f(x) - f(0) = \cosh t \Big|_0^x$

1.0 Como $f(0)=1$; $f(x) - \cancel{1} = \cosh x - \cancel{1} \Rightarrow f(x) = \cosh(x)$

b) i)



$$\text{Area} = \int_{-\infty}^{\infty} (f(x) - Y_{Asin})\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1-x^2}{1+x^2} - (-1)\right]dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{1+x^2}\,dx = 2 \overset{\text{par}}{\cdot} 2\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

donde $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to\infty} \int_0^t \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to\infty} (\arctan t) = \frac{\pi}{2}$

1.5 Sigue que $A = \int_{-\infty}^{\infty} (f(x) - Y_{Asin})\,dx$ converge y $A = 4\cdot\frac{\pi}{2} = 2\pi$

ii) El volumen de revolución de Ω con respecto a OY, si existe es $V_{OY} = 2\pi\int_0^{\infty} x\left(f(x) - Y_{Asin}(x)\right)dx = 2\pi\int_0^{\infty} x\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}+1\right)dx$

0.5 $\Rightarrow V_{OY} = 2\pi\int_0^{\infty} \frac{2x\,dx}{1+x^2}$. Pero $\int_0^{\infty} \frac{2x\,dx}{1+x^2} = \lim_{t\to\infty} \int_0^t \frac{2x}{1+x^2}\,dx =$

$= \lim_{t\to\infty} \left[\ln(1+x^2)\right]_0^t = \lim_{t\to\infty} \ln(1+t^2) \to \infty$ diverge.

1.0 Sigue que V_{OY} de la región Ω NO EXISTE.

Pauta Problema 3

a) i) $r(t) = (\cos(g(t)), \operatorname{sen}(g(t)), 1) \quad t \in [1, \infty)$

$$r'(t) = (-g'(t)\operatorname{sen}(g(t)), g'(t)\cos(g(t)), 0) \Rightarrow \|r'(t)\| = \sqrt{(g'(t))^2} = |g'(t)|$$

$$\Rightarrow \|r'(t)\| = g'(t) \quad (g'(t) > 0)$$

Sigue que $L(\Gamma) = \int_1^\infty \|r'(t)\| = \underbrace{\int_1^\infty g'(t)dt}_{\text{Impropia}} = \lim_{u\to\infty} g(t)\Big|_1^u$

(1.0) $\Rightarrow L(\Gamma) = \lim_{u\to\infty}(g(u) - g(1)) = M - g(1)$

$$T = \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|} = \frac{1}{g'(t)}(-g'(t)\operatorname{sen}(g(t)), g'(t)\cos(g(t)), 0) = (-\operatorname{sen}(g(t)), \cos(g(t)), 0)$$

(1.0) $T' = (-g'(t)\cos(g(t)), -g'(t)\operatorname{sen}(g(t)), 0) \wedge \|T'\| = \sqrt{(g'(t))^2} = |g'(t)| = g'(t) > 0$

Así $N = \dfrac{T'}{\|T'\|} = (-\cos(g(t)), -\operatorname{sen}(g(t)), 0)$

(1.0) y $B = T \times N = (0, 0, 1)$

ii) (1.0) $K(t) = \dfrac{\|T'\|}{\|r'\|} = \dfrac{g'(t)}{g'(t)} = 1$ (constante) y $\tau(t) = 0$ por ser Γ curva plana.

b) Longitud de Arco $s = \int_0^t \|r'(u)\| du$

$$r(t) = \left(a\cos\left(\tfrac{t}{c}\right), a\operatorname{sen}\left(\tfrac{t}{c}\right), b\tfrac{t}{c}\right) \Rightarrow r'(t) = \left(-\tfrac{a}{c}\operatorname{sen}\left(\tfrac{t}{c}\right), \tfrac{a}{c}\cos\left(\tfrac{t}{c}\right), \tfrac{b}{c}\right)$$

$$\Rightarrow \|r'(t)\| = \sqrt{\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2}} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{c^2}} = 1 \quad \text{pués } a^2+b^2 = c^2$$

Sigue que $s = \int_0^t \|r'(u)\| du = \int_0^t 1\, du = t$. Así, parámetro $t = s$

(1.0) es decir, Γ esta arcoparametrizada $r(t(s)) = \sigma(s) = \left(a\cos\left(\tfrac{s}{c}\right), a\operatorname{sen}\left(\tfrac{s}{c}\right), b\tfrac{s}{c}\right)$

(0.5) ahora $T = \dfrac{d\sigma}{ds} = \left(-\tfrac{a}{c}\operatorname{sen}\left(\tfrac{s}{c}\right), \tfrac{a}{c}\cos\left(\tfrac{s}{c}\right), \tfrac{b}{c}\right) \wedge \hat{k} = (0,0,1) \Rightarrow T\cdot\hat{k} = \tfrac{b}{c} = C^{te} \Rightarrow \measuredangle(T, \hat{k}) = C^{te}$

(0.5) y $N = \dfrac{T'}{\|T'\|} = \dfrac{\left(-a/c^2\cos(s/c), -a/c^2\operatorname{sen}(s/c), 0\right)}{a/c^2} = \left(-\cos\left(\tfrac{s}{c}\right), -\operatorname{sen}\left(\tfrac{s}{c}\right), 0\right) \Rightarrow N\cdot\hat{k} = 0 \Rightarrow N \perp \hat{k}$