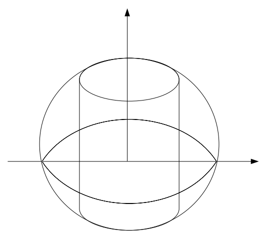
Control 3

P1. a) (3,0 ptos.) Una esfera de radio R se perfora mediante un cilindro cuyo eje coincide con un diámetro de la esfera (ver figura).



Determinar el radio a que debe tener el cilindro para que se mantenga la mitad de la superficie de la esfera, después de la perforación (Use que $S_{\text{esfera}} = 4\pi R^2$).

b) (3,0 ptos.) Calcule qué parte del volumen de la esfera queda luego de la perforación anterior (Use que $V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3}\pi R^3$).

P2. a) Sea Γ una curva regular simple parametrizada por $r(t)$.

(i) (1,0 pto.) Pruebe que

$$\frac{dr}{dt} = T\frac{ds}{dt} \quad \text{y} \quad \frac{d^2r}{dt^2} = \kappa N\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + T\frac{d^2s}{dt^2}.$$

(ii) (1,0 pto.) Calcule $\frac{dr}{dt} \times \frac{d^2r}{dt^2}$ y concluya que

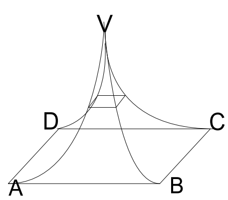
$$\kappa(t) = \frac{\left\|\frac{dr}{dt} \times \frac{d^2r}{dt^2}\right\|}{\left\|\frac{dr}{dt}\right\|^3}$$

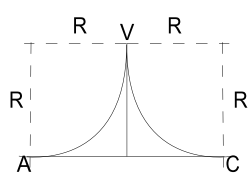
b) (4,0 ptos.) Para la curva parametrizada por $r(t) = \left(t^2, t + \frac{t^3}{3}, t - \frac{t^3}{3}\right)$ con $t \in [0,\infty)$ se pide calcular $s(t)$, $T(t)$, $N(t)$, $\kappa(t)$, para $t \in \mathbb{R}^+$.

P3. a) (2,0 ptos.) Encuentre la masa total del alambre parametrizado por $r(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), \cos(t))$ con $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, cuya densidad de masa está dada por $\rho(x,y,z) = yz$.

b) (4,0 ptos.) El sólido de la figura, de base cuadrada, se construye de modo que cada plano paralelo a la base corta al sólido en una sección cuadrada cuyos vértices se apoyan en los arcos de circunferencia $\widehat{AV}$, $\widehat{BV}$, $\widehat{CV}$ y $\widehat{DV}$.

Cada arco corresponde a un cuadrante de circunferencia de radio R (ver esquema)
Se pide calcular el volumen del sólido $ABCDV$.



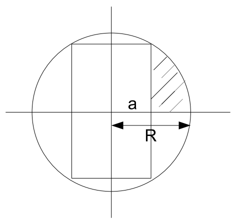


07 de noviembre de 2009
Sin consultas
Tiempo: 3:00 hrs.

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Cálculo Diferencial e Integral 09-2

Pauta Control 3

P1. a) Para obtener la superficie de la esfera que queda después de la perforación rotamos en torno al eje OY el área achurada que corresponde a la sección no perforada.



Sigue que

$$S = 2 \cdot 2\pi \int_a^R x ds = 4\pi \int_a^R x\sqrt{1 + (y')^2} dx$$

donde $x^2 + y^2 = R^2 \Rightarrow y = \sqrt{R^2 - x^2} \Rightarrow y' = -\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}$
Así

$$S = 4\pi \int_a^R x\sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right)^2} dx = 4\pi \int_a^R x\sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} dx$$

$$= 4\pi R \int_a^R \frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = 4\pi R[-\sqrt{R^2 - x^2}]\Big|_a^R = 4\pi R\sqrt{R^2 - a^2} \text{ [2,0]}$$

Se pide que $S = \frac{1}{2}S_{\text{esfera}} = \frac{1}{2}4\pi R^2 = 2\pi R^2$, entonces

$$4\pi R\sqrt{R^2 - a^2} = 2\pi R^2 \Rightarrow \sqrt{R^2 - a^2} = \frac{R}{2} \Rightarrow R^2 - a^2 = \frac{1}{4}R^2 \Rightarrow a^2 = \frac{3}{4}R^2 \Rightarrow a = \frac{\sqrt{3}}{2}R. \text{ [1,0]}$$

b) Para el volumen remanente rotamos la sección anterior en torno al eje OY con $x \in [a, R]$ y $a = \frac{\sqrt{3}}{2}R$. Así

$$V = 2 \cdot 2\pi \int_a^R x f(x) dx = 4\pi \int_a^R x\sqrt{R^2 - x^2} dx$$

sea $u^2 = R^2 - x^2$ así $2udu = -2xdx$, entonces [1,0]

$$= 4\pi \int_{\frac{1}{2}R}^{0} \sqrt{u^2}(-udu) = 4\pi \int_{0}^{\frac{1}{2}R} u^2 du = \frac{4\pi}{3} u^3 \Big|_0^{R/2} = \frac{4\pi}{3}\frac{R^3}{8} = \frac{1}{8}\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)$$

Como $V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3}\pi R^3$ se concluye que $V = \frac{1}{8}V_{\text{esfera}}$. [2,0]

P2. a) (i) Usando regla de la cadena $\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{ds}\frac{ds}{dt}$ donde $\frac{dr}{ds} = T$. Así $\frac{dr}{dt} = T\frac{ds}{dt}$. [0,3]

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d}{dt}\frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}(T\frac{ds}{dt}) = \frac{dT}{dt}\frac{ds}{dt} + T\frac{d^2s}{dt^2}$$

y

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dT}{ds}\frac{ds}{dt}$$

donde $\frac{dT}{ds} = \kappa N \Rightarrow \frac{dT}{dt} = \kappa N \frac{ds}{dt}$. Sigue que $\frac{d^2r}{dt^2} = \kappa(\frac{ds}{dt})^2 + T\frac{d^2s}{dt^2}$. [0,7]

(ii)

$$\frac{dr}{dt} \times \frac{d^2r}{dt^2} = (T\frac{ds}{dt}) \times (\kappa(\frac{ds}{dt})^2 + T\frac{d^2s}{dt^2}) = \kappa(\frac{ds}{dt})^3 T \times N + \frac{ds}{dt}\cdot\frac{d^2s}{dt^2} T \times T$$

donde $T \times N = B$ y $T \times T = 0$. [0,5]
Así $\frac{dr}{dt} \times \frac{d^2r}{dt^2} = \kappa(\frac{ds}{dt})^3 B$

Tomando norma $\left\|\frac{dr}{dt} \times \frac{d^2r}{dt^2}\right\| = \left\|\kappa(\frac{ds}{dt})^3 B\right\| = \kappa\left\|(\frac{ds}{dt})^3\right\|$. [0,5]
Sigue que $\kappa(t) = \frac{\left\|\frac{dr}{dt}\times\frac{d^2r}{dt^2}\right\|}{\left\|\frac{ds}{dt}\right\|^3}$, donde $\frac{ds}{dt} = \left\|\frac{dr}{dt}\right\|$.

b) $r(t) = \left(t^2, t + \frac{t^3}{3}, t - \frac{t^3}{3}\right)$ con $t \in [0,\infty)$

$$r'(t) = \left(2t, 1+t^2, 1-t^2\right) \Rightarrow \left\|\frac{dr}{dt}\right\| = \sqrt{4t^2 + (1+t^2)^2 + (1-t^2)^2}$$

$$\Rightarrow \left\|\frac{dr}{dt}\right\| = \sqrt{4t^2 + 2t^4 + 2} = \sqrt{2}\sqrt{t^4 + 2t^2 + 1} = \sqrt{2}\sqrt{(t^2+1)^2} = \sqrt{2}(1+t^2) \text{ [0,5]}$$

$$s = \int_0^t \left\|\frac{dr}{dt}(\tau)\right\| d\tau = \int_0^t \sqrt{2}(1+\tau^2)d\tau = \sqrt{2}(\tau + \frac{\tau^3}{3})\Big|_0^t = \sqrt{2}(t + \frac{1}{3}t^3)$$

Entonces $s(t) = \sqrt{2}(t + \frac{1}{3}t^3)$. [0,3]

$$T = \frac{\frac{dr}{dt}}{\left\|\frac{dr}{dt}\right\|} = \frac{1}{\sqrt{2}(1+t^2)}(2t, 1+t^2, 1-t^2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{2t}{1+t^2}, 1, \frac{1-t^2}{1+t^2}) \text{ [0,5]}$$

por otra parte

$$N = \frac{dT}{dt} / \left\| \frac{dT}{dt} \right\|$$

entonces calculemos

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left(\frac{2t}{1+t^2} \right)', 0, \left(\frac{1-t^2}{1+t^2} \right)' \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}, 0, \frac{-4t}{(1+t^2)^2} \right) \text{ [0,5]}$$

y

$$\left\| \frac{dT}{dt} \right\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{4(1-t^2)^2}{(1+t^2)^4} + \frac{16t^2}{(1+t^2)^4}} = \frac{2}{\sqrt{2}(1+t^2)^2} \sqrt{(1-t^2)^2 + 4t^2}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{2}(1+t^2)^2} \sqrt{(1+t^2)^2} = \frac{\sqrt{2}}{1+t^2} \text{ [1,0]}$$

Sigue que

$$N = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}, 0, \frac{-4t}{(1+t^2)^2} \right) \frac{1+t^2}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}, 0, \frac{-2t}{(1+t^2)^2} \right) \text{ [0,5]}$$

Por último

$$\kappa(t) = \left\| \frac{dT}{dt} \right\| / \left\| \frac{dr}{dt} \right\| = \frac{\sqrt{2}}{1+t^2} / \sqrt{2}(1+t^2) = \frac{1}{(1+t^2)^2} \text{ [0,5]}$$

P3. a) $r(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), \cos(t))$ con $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, y $\rho(x, y, z) = yz$.

La masa total es $M = \int_0^{\pi/2} \rho(x, y, z) \left\| \frac{dr}{dt} \right\| dt$. donde

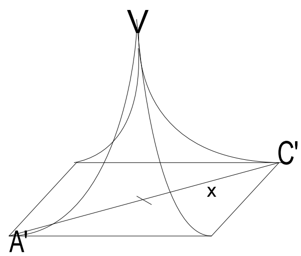
$$\frac{dr}{dt} = (-\operatorname{sen} t, \cos t, -\operatorname{sen} t) \Rightarrow \left\| \frac{dr}{dt} \right\| = \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 t} \text{ [0,5]}$$

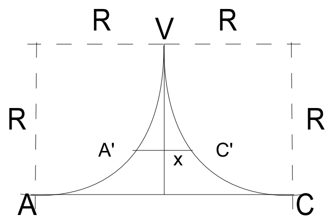
Así

$$M = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} t \cos t \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 t}\, dt$$

Por sustitución $u = 1 + \operatorname{sen}^2 t$, $du = 2 \operatorname{sen} t \cos t dt$, $t = 0 \Rightarrow u = 1$, $t = \pi/2 \Rightarrow u = 2$, entonces

$$M = \int_1^2 \frac{1}{2} \sqrt{u} du = \frac{1}{2} \int_1^2 u^{1/2} du = \frac{1}{\cancel{2}} \frac{\cancel{2}}{3} u^{2/3} \Big|_1^2 = \frac{1}{3} (\sqrt{8} - 1) \text{ [1,5]}$$





b) En el corte según la diagonal AC del cuadrado base, se ven los arcos de cuartos de círcunferencia $\widehat{AV}$ y $\widehat{CV}$.

La ecuación del arco $\widehat{CV}$ será $(x-R)^2+(y-R^2)^2=R^2$ [0,5]

Además $\overline{A'C'}$ es la diagonal del cuadrado de la figura y $\overline{A'C'}=2x$. Entonces, si a denota el lado del cuadrado, entonces $a\sqrt{2}=2x \Rightarrow a=\sqrt{2}x \Rightarrow$ Área Cuadrado $=a^2=2x^2$. [0,5]

Por otra parte, de la ecuación del arco, se tiene que $x(y)=R-\sqrt{R^2-(y^-R)^2}$. Entonces el volumen pedido será $V=\int_0^R A(y)dy$ donde $A(y)=2[x(y)]^2$. Sigue que

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^R 2[R-\sqrt{R^2-(y-R)^2}]^2 dy \text{ [1,0]}\\
&= 2\int_0^R \{R^2+R^2-(y-R)^2-2R\sqrt{R^2-(y-R)^2}\}dy\\
&= 2\int_0^R \{R^2+Ry-y^2-2R\sqrt{R^2-(y-R)^2}\}dy\\
&= 2[R^2y+Ry^2-\frac{1}{3}y^3]\Big|_0^R - 4R\int_0^R \sqrt{R^2-(y-R)^2}dy\\
&= \frac{10}{5}R^3-4R\int_0^R \sqrt{R^2-(y-R)^2}dy
\end{aligned}$$

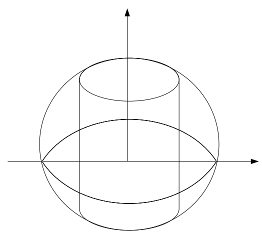
Sustitución $y-R=R\operatorname{sen} t$, $dy=R\cos t dt$, $y=0 \Rightarrow t=-\pi/2$, $y=R \Rightarrow t=0$

$$\begin{aligned}
V &= \frac{10}{5}R^3-4R\int_{-\pi/2}^0 R^2\cos^2 t dt\\
&= \frac{10}{5}R^3-4R^3\int_{-\pi/2}^0 \frac{1+\cos(2t)}{2}dt\\
&= \frac{10}{5}R^3-2R^3[t+\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2t)]\Big|_{-\pi/2}^0 = (\frac{10}{3}-\pi)R^3 \text{ [1,0]}
\end{aligned}$$

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Cálculo Diferencial e Integral 09-2

Control 3

P1. a) (3,0 ptos.) Una esfera de radio R se perfora mediante un cilindro cuyo eje coincide con un diámetro de la esfera (ver figura).



Determinar el radio a que debe tener el cilindro para que se mantenga la mitad de la superficie de la esfera, después de la perforación (Use que $S_{\text{esfera}} = 4\pi R^2$).

b) (3,0 ptos.) Calcule qué parte del volumen de la esfera queda luego de la perforación anterior (Use que $V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3}\pi R^3$).

P2. a) Sea Γ una curva regular simple parametrizada por $r(t)$.

(i) (1,0 pto.) Pruebe que

$$\frac{dr}{dt} = T\frac{ds}{dt} \quad \text{y} \quad \frac{d^2r}{dt^2} = \kappa N\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + T\frac{d^2s}{dt^2}.$$

(ii) (1,0 pto.) Calcule $\frac{dr}{dt} \times \frac{d^2r}{dt^2}$ y concluya que

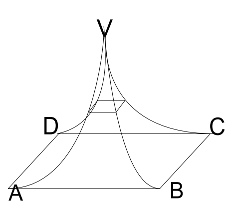
$$\kappa(t) = \frac{\left\| \frac{dr}{dt} \times \frac{d^2r}{dt^2} \right\|}{\left\| \frac{dr}{dt} \right\|^3}$$

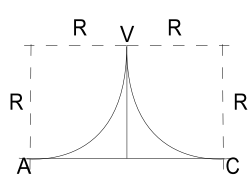
b) (4,0 ptos.) Para la curva parametrizada por $r(t) = \left(t^2, t + \frac{t^3}{3}, t - \frac{t^3}{3}\right)$ con $t \in [0, \infty)$ se pide calcular $s(t)$, $T(t)$, $N(t)$, $\kappa(t)$, para $t \in \mathbb{R}^+$.

P3. a) (2,0 ptos.) Encuentre la masa total del alambre parametrizado por $r(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), \cos(t))$ con $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, cuya densidad de masa está dada por $\rho(x, y, z) = yz$.

b) (4,0 ptos.) El sólido de la figura, de base cuadrada, se construye de modo que cada plano paralelo a la base corta al sólido en una sección cuadrada cuyos vértices se apoyan en los arcos de circunferencia $\widehat{AV}$, $\widehat{BV}$, $\widehat{CV}$ y $\widehat{DV}$.

Cada arco corresponde a un cuadrante de circunferencia de radio R (ver esquema)
Se pide calcular el volumen del sólido $ABCDV$.





07 de noviembre de 2009
Sin consultas
Tiempo: 3:00 hrs.