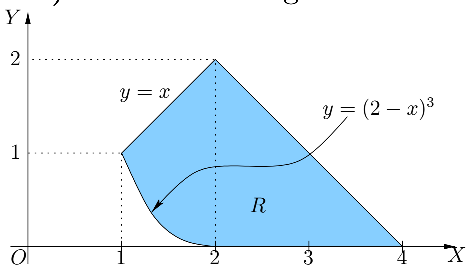
Control 3, MA1A2 Cálculo Diferencial e Integral
Departamento de Ingeniería Matemática, FCFM, U. de Chile
Semestre 2008/2 (8 de Noviembre)

P.1.- a) Considere la región R de la figura.



I) (*1.5 ptos.*) Calcule el área de R.

II) (*1.5 ptos.*) Calcule el volumen del sólido de revolución generado por la rotación de R en torno al eje OY.

III) (*1.5 ptos.*) Calcule el área del manto (total) del sólido de revolución generado por la rotación de R en torno al eje OX.

Solución

I)

$$A_1 = \int_1^2 x dx = \frac{4-1}{2} = \frac{3}{2}.$$

.... 0.5 pto.

$$A_2 = \int_2^4 (4-x)dx = 8 - \frac{16-4}{2} = 2.$$

.... 0.5 pto.

$$A_3 = \int_1^2 (2-x)^3 dx = \frac{1}{4}$$

.... 0.5 pto.

Finalmente, el área pedida es $A_1 + A_2 - A_3 = \frac{13}{4}$.

II)

$$V_1 = 2\pi \int_1^2 x \cdot x\, dx = 2\pi \frac{8-1}{3} = \frac{14\pi}{3}$$

.... 0.5 pto.

$$V_2 = 2\pi \int_2^4 x \cdot (4-x)dx = 2\pi \left(2(16-4) - \frac{64-8}{3}\right) = 2\pi(24 - \frac{56}{3}) = \frac{32\pi}{3}$$

.... 0.5 pto.

$$V_3 = 2\pi \int_1^2 x \cdot (2-x)^3 = 2\pi \left(-x \frac{(2-x)^4}{4} \Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{(2-x)^4}{4} \right)$$
$$= 2\pi \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{20} \right) = \frac{3\pi}{5}$$

.... 0.5 pto.

El volumen pedido es $V_1 + V_2 - V_3 = 14\frac{11}{15}\pi$

Solución

III)

$$S_1 = 2\pi \int_1^2 x\sqrt{2}dx = 3\pi\sqrt{2}.$$

$$S_2 = 2\pi \int_2^4 (4-x)\sqrt{2} = 4\pi\sqrt{2}.$$

. . . . 0.5 pto.

$$S_3 = 2\pi \int_1^2 (2-x)^3\sqrt{1+9(2-x)^4}dx$$

. . . . 0.4 pto.

$$= 2\pi\frac{-2}{3\cdot 36}(1+9(2-x)^4)^{3/2}\Big|_1^2 = \frac{\pi}{27}(10\sqrt{10}-1)$$

. . . . 0.4 pto.

La superficie pedida es $S_1 + S_2 + S_3$. . . . . 0.2 pto.

b) (*1.5 ptos.*) Calcule el largo de la curva $y = a\cosh(x/a)$ entre $x = 0$ y $x = a$.

Solución

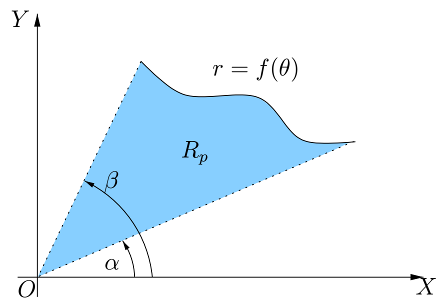
$ds = \sqrt{1+\operatorname{senh}^2(x/a)}dx = \cosh(x/a)dx$. Por lo tanto, ... 1.0 pto.

$$L = \int_0^a \cosh(x/a)dx = a\operatorname{senh}(1).$$

. . . . 0.5 pto.

P.2.- a) (*2.0 ptos.*) Se sabe que el volumen del sólido de revolución generado por la rotación de una región plana R en torno al eje OY es igual al producto de su área $A(R)$ por la longitud de la circunferencia descrita por su centro de gravedad $2\pi\bar{x}$.

Usando esto y particiones P del intervalo $[\alpha, \beta]$, tales que $|P| \to 0$, demuestre que el volumen del sólido de revolución generado por la rotación de la región polar R_p de la figura (que está limitada por la curva de ecuación $r = f(\theta)$ en coordenadas polares y $\alpha \leq \theta \leq \beta$) en torno al eje OY, está dada por



$$\frac{2\pi}{3} \int_{\alpha}^{\beta} f^3(\theta) \cos\theta \, d\theta$$

Solución

Al dividir el intervalo $[\alpha, \beta]$ según una partición $P = \{\theta_0, \ldots, \theta_n\}$, donde $|P| \to 0$, en cada intervalo el sector que rota en torno al eje OY se puede aproximar al primer orden, por ya sea un sector circular de radio $f(\theta)$ o un triángulo isósceles de lado $f(\theta)$.

Así, el área de este sector (al primer orden) es $dA = \frac{1}{2} f^2(\theta) d\theta$. .... 0.5 pto.

El centro de gravedad de este sector está en $(x_g, y_g) = \frac{2}{3} f(\theta)(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$. .... 0.5 pto.

Por lo tanto, el volumen generado por la rotación en torno al eje OY de este sector es:

$$dV = 2\pi x_g dA = \frac{2}{3} \pi f^3(\theta) \cos\theta$$

.... 0.5 pto.

Integrando esta expresión entre $[\alpha, \beta]$ se obtiene el resultado pedido. .... 0.5 pto.

b) (*2.0 ptos.*) Use el resultado anterior para calcular el volumen del sólido generado por la rotación en torno al eje OY, de la región encerrada por la curva $r = a \operatorname{sen} 2\theta$ (en coordenadas polares), para $\theta \in [0, \pi/2]$.

Solución

En este caso

$$V_{OY} = \frac{2\pi a^3}{3} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3(2\theta) \cos\theta d\theta = \frac{16\pi a^3}{3} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3\theta \cos^4\theta d\theta$$

.... 1.0 pto.

$$= \frac{16\pi a^3}{3} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta(1 - \cos^2\theta) \cos^4\theta d\theta = \frac{16\pi a^3}{3}(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}) = \frac{32\pi a^3}{3 \cdot 35}$$

.... 1.0 pto.

c) *(2.0 ptos.)* La curva en $\mathbb{R}^3$ de parametrización $\vec{r}(t) = (\operatorname{sen}^2 t, \operatorname{sen} t \cos t, \cos t)^T$, $t \in [0, 2\pi]$ pasa dos veces por el punto $(1, 0, 0)^T$. Demuestre que las dos tangentes en ese punto son perpendiculares entre sí.

Solución

La curva pasa por ese punto para $t = \pi/2$ y para $t = 3\pi/2$. .... 0.5 pto.

El vector tangente en función de t es paralelo a

$$\vec{r}'(t) = (2 \operatorname{sen} t \cos t, \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t, \operatorname{sen} t)^T$$

.... 0.5 pto.

Por lo tanto en estos dos instantes los vectores tangentes son paralelos a

$$(0, -1, 1) \qquad \text{y} \qquad (0, -1, -1)$$

respectivamente. .... 0.5 pto.

El producto punto de estos vectores es igual a cero. Por lo tanto las direcciones son perpendiculares entre sí. .... 0.5 pto.

P.3.- Considere la curva definida por la parametrización:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t}\cos t \\ e^{-t}\operatorname{sen} t \\ e^{-t} \end{pmatrix}, \qquad t \in [0, 2\pi].$$

a) (*1.0 ptos.*) Demuestre que la curva está contenida en el cono de ecuación $x^2 + y^2 = z^2$.

Solución

Evaluando:

$$x^2 + y^2 = e^{-2t}\cos^2 t + e^{-2t}\operatorname{sen}^2 t = e^{-2t} = z^2$$

.... 1.5 pto.

b) (*1.5 ptos.*) Demuestre que en cada punto de la curva, el vector tangente forma un ángulo constante con el vector $\frac{\vec{r}(t)}{\|\vec{r}(t)\|}$

Solución

Derivando tenemos que

$$\vec{r}'(t) = \begin{pmatrix} e^{-t}(-\cos t - \operatorname{sen} t) \\ e^{-t}(-\operatorname{sen} t + \cos t) \\ -e^{-t} \end{pmatrix}, \qquad t \in [0, 2\pi].$$

.... 0.4 pto.

Con esto:

$$s'(t) = e^{-t}\sqrt{3}$$

.... 0.3 pto.

Por lo tanto

$$T = \frac{\sqrt{3}}{3}\begin{pmatrix} (-\cos t - \operatorname{sen} t) \\ (-\operatorname{sen} t + \cos t) \\ -1 \end{pmatrix}$$

.... 0.3 pto.

Además

$$\frac{\vec{r}(t)}{\|\vec{r}(t)\|} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} \cos t \\ \operatorname{sen} t \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad t \in [0, 2\pi].$$

.... 0.2 pto.

Hacemos el producto punto y obtenemos el coseno del ángulo α formado por ambos vectores:

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{6}((-\cos^2 t - \operatorname{sen} t\cos t) + (-\operatorname{sen}^2 t + \operatorname{sen} t\cos t) - 1) = -\frac{\sqrt{6}}{3}$$

.... 0.3 pto.

c) (*1.5 ptos.*) Calcular la longitud de la curva entre $t = 0$ y el instante en que su altura se reduce a la mitad de la inicial.

Solución

La altura se reduce a la mitad cuando $z = e^{-t} = \frac{1}{2}$, lo cual ocurre para $t = \ln 2$. .... 0.7 pto.

El largo es:

$$L = \int_0^{\ln 2} \sqrt{3}e^{-t}dt = \sqrt{3}(1 - \frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

.... 0.8 pto.

d) (*2.0 ptos.*) Calcule los vectores normal $\hat{N}(t)$ y binormal $\hat{B}(t)$ y a demás la curvatura $\kappa(t)$ y torsión $\tau(t)$ en cada punto de la curva.

Solución

Derivando se tiene que:

$$T' = \frac{\sqrt{3}}{3}\begin{pmatrix}(\operatorname{sen} t - \cos t)\\(-\cos t - \operatorname{sen} t)\\0\end{pmatrix}, \qquad \|T'\| = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Por lo tanto:

$$N = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}(\operatorname{sen} t - \cos t)\\(-\cos t - \operatorname{sen} t)\\0\end{pmatrix}$$

.... 0.5 pto.

y

$$\kappa(t) = \frac{\sqrt{2}}{3}e^t.$$

.... 0.5 pto.

El vector binormal se calcula usando el producto cruz:

$$B = T \times N = \frac{\sqrt{3}}{3}\begin{pmatrix}(-\cos t - \operatorname{sen} t)\\(-\operatorname{sen} t + \cos t)\\-1\end{pmatrix} \times \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}(\operatorname{sen} t - \cos t)\\(-\cos t - \operatorname{sen} t)\\0\end{pmatrix}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{6}\begin{pmatrix}(-\cos t - \operatorname{sen} t)\\(\cos t - \operatorname{sen} t)\\2\end{pmatrix}$$

.... 0.5 pto.

Finalmente, derivamos el vector binormal

$$\frac{dB}{ds} = \frac{B'}{s'} = \frac{\sqrt{6}}{6\sqrt{3}}e^t\begin{pmatrix}(\operatorname{sen} t - \cos t)\\(-\operatorname{sen} t - \cos t)\\0\end{pmatrix} = \frac{e^t}{3}N$$

Por lo tanto $\tau(t) = -\frac{e^t}{3}$ .... 0.5 pto.