Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Cáculo diferencial 15-2

Control 3

Pregunta 1.

a) Dada la curva C definida por:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}, \quad a > 0$$

i) *[2ptos]* Demuestre que la longitud de arco de la curva C en el primer cuadrante está dada por:

$$s = a^{1/3} \int_0^a \frac{dx}{x^{1/3}}$$

ii) *[1 ptos]* Demuestre que la integral s converge y calcule su valor.

b) Considere la curva definida por $y = \sqrt{\frac{x}{2-x}}$ y la región Ω del primer cuadrante comprendida entre la curva y su asíntota vertical $x = 2$,

i) *[1,5 ptos]* Demuestre que el área de la región Ω existe, es decir es finita, y calcúlela.

ii) *[1,5 ptos]* Averigüe si los volúmenes de revolución generados por la región Ω con respecto al eje OX y en torno al eje OY existen o no.

Pregunta 2.

a) Sea $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [0, \infty)$, decreciente en $[0, \infty)$ clase C^1 y tal que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

i) *[1,5 ptos]* Demuestre que $\displaystyle\int_0^\infty f'(x)dx$ es absolutamente convergente.

ii) *[1,5 ptos]* Demuestre que $\displaystyle\int_0^\infty f(x)sen(\alpha x)dx, \alpha > 0$ es convergente.

b) *[3ptos]* Estudie la convergencia de la integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{arc\,tg}(x)dx}{x^2 + a^2}$ para los casos $a \neq 0$ y para $a = 0$.

Pregunta 3. Dada la curva Γ parametrizada por:

$$r(t) = (t, \sqrt{t^2 - 1}, \ln(t + \sqrt{t^2 - 1})), \; t \geq 1$$

i) *[3ptos]* Calcule la longitud de la curva Γ en función de t y escriba la parametrización por longitud de arco, $\sigma(s)$.

ii) *[3ptos]* Calcule los vectores T y N y la curvatura , en función del parámetro que le sea más conveniente.

Tiempo: 3 horas.

Cálculo Dif. e Integral - Examen (2015-02)

Pauta Problema 1

a) i) Curva C: $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$, $a>0$. $S=\int_0^a\sqrt{1+(y')^2}\,dx$

(1.0) $y=(a^{2/3}-x^{2/3})^{3/2}$, $y'=\frac{3}{2}(a^{2/3}-x^{2/3})^{1/2}\left(-\frac{2}{3}x^{-1/3}\right)=-\frac{(a^{2/3}-x^{2/3})^{1/2}}{x^{1/3}}$

Así, $S=\int_0^a\sqrt{1+\frac{a^{2/3}-x^{2/3}}{x^{2/3}}}\,dx=\int_0^a\sqrt{\frac{\cancel{x^{2/3}}+a^{2/3}-\cancel{x^{2/3}}}{x^{2/3}}}\,dx=\int_0^a\frac{a^{1/3}}{x^{1/3}}$

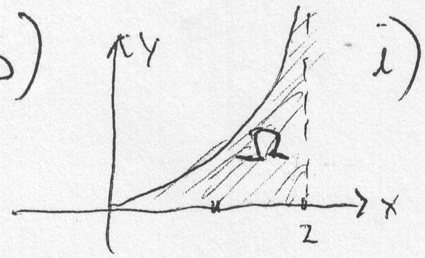
(1.0) entonces $S=a^{1/3}\int_0^a\frac{dx}{x^{1/3}}$ (OBSERVACIÓN: También puede resolverse con alguna sustitución)

ii) Claramente S es integral impropia de 2ª especie (pero)

(0.5) y es convergente por ser del tipo $\int_0^a\frac{dx}{x^\alpha}$ con $\alpha=\frac{1}{3}<1$

Su valor $S=a^{1/3}\int_0^a\frac{dx}{x^{1/3}}=a^{1/3}\lim_{t\to0^+}\int_t^a x^{-1/3}\,dx=a^{1/3}\lim_{t\to0}\frac{3}{2}\left[x^{2/3}\right]_t^a$

(0.5) $=\frac{3}{2}a^{1/3}\lim_{t\to0}(a^{2/3}-t^{2/3})=\frac{3}{2}a^{1/3}a^{2/3}=\frac{3}{2}a$

b) 

i) Área de la Región Ω

$A=\int_0^2\sqrt{\frac{x}{2-x}}\,dx$, integral impropia 2ª especie

Es comparable con $\int_0^2\frac{dx}{(2-x)^{1/2}}$ que converge $(1/2<1)$

(0.5) con $\lim_{x\to2}\frac{\frac{\sqrt{x}}{\cancel{\sqrt{2-x}}}}{\frac{1}{\cancel{\sqrt{2-x}}}}=\sqrt{2}\neq0$. Sigue que $\int_0^2\sqrt{\frac{x}{2-x}}\,dx$ converge.

Su valor: sea $x=2\sin^2t$, $dx=4\sin t\cos t\,dt\Rightarrow A=\int_0^{\pi/2}\sqrt{\frac{2\sin^2}{2-2\sin^2}}\,4\sin\cos\,dt$

(1.0) $=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin t}{\cancel{\cos t}}4\sin t\cancel{\cos t}\,dt=4\int_0^{\pi/2}\sin^2t\,dt=\overset{2}{\cancel{4}}\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos2t}{\cancel{2}}\,dt=2\left[t-\frac{1}{2}\cancel{\sin2t}\right]_0^{\pi/2}$

Sigue que Área $\Omega=\pi$

(0.7) ii) $\overset{\text{NO EXISTE}}{V_{Rev\,ox}}=\pi\int_0^2 f(x)^2\,dx=\pi\int_0^2\frac{x}{2-x}\,dx$ diverge comparación $\int_0^2\frac{dx}{(2-x)^{\alpha}}$, $\alpha=1$

(0.8) $\overset{\text{EXISTE}}{V_{Rev\,oy}}=2\pi\int_0^2 x f(x)\,dx=2\pi\int_0^2\frac{x^{3/2}}{(2-x)^{1/2}}$ converge comparación $\int_0^2\frac{dx}{(2-x)^{1/2}}$, $1/2<1$

Pauta Problema 2

a) $f(x) \geq 0,\ \forall x \in [0,\infty)$, f decreciente en $[0,\infty) \wedge \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

i) Demostrar que $\int_0^\infty f'(x)dx$ es absolutamente convergente.

En efecto, como f es decreciente en $[0,\infty)$, $f'(x) \leq 0$

de donde $|f'(x)| = -f'(x) \quad \forall x \in [0,\infty)$

(0.5) Sigue que $\int_0^\infty |f'(x)|dx = -\int_0^\infty f'(x)dx = -\lim_{b\to\infty} \int_0^b f'(x)dx$

$= -\lim_{b\to\infty} \left[f(x)\right]_0^b = -\lim_{b\to\infty} (f(b) - f(0)) = -\cancel{\lim_{b\to\infty} f(b)}_{\to 0} + f(0) = \underbrace{f(0)}_{\text{EXISTE.}}$

(1.0) Entonces $\int_0^\infty |f'(x)|dx$ converge $\Rightarrow \int_0^\infty f'(x)dx$ es Absolut. Convergente

ii) Demostrar que $\int_0^\infty f(x)\,\text{sen}(\alpha x)dx,\ \alpha > 0$ converge.

$$I = \int_0^\infty f(x)\,\text{sen}(\alpha x)dx = -\frac{1}{\alpha} f(x)\cos(\alpha x)\Big|_0^{\to\infty} + \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty f'(x)\cos(\alpha x)dx$$

Partes $u = f(x) \to du = f'(x)dx$

$dv = \text{sen}(\alpha x)dx \to v = -\frac{1}{\alpha}\cos(\alpha x)$

(0.5)

Como $\lim_{x\to\infty} \overset{\to 0}{f(x)}\cos(\alpha x) = 0$, $I = \frac{1}{\alpha} f(0) + \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty f'(x)\cos(\alpha x)dx$

además $|f'(x)\overbrace{\cos(\alpha x)}^{\leq 1}| \leq |f'(x)|$ y por (i) $\int_0^\infty |f'(x)|dx$ converge.

por lo tanto $\int_0^\infty f'(x)\cos(\alpha x)$ es absolutamente convergente

(1.0) de donde $\int_0^\infty f(x)\,\text{sen}(\alpha x)dx$ CONVERGE.

b) Estudiar convergencia de $\int_0^\infty \frac{\text{arctg}\, x}{a^2+x^2}dx$ para $a \neq 0 \wedge a = 0$

Para $a \neq 0$ $\int_0^\infty \frac{\text{arctg}\, x}{a^2+x^2}dx$ es comparable con $\int_0^\infty \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\text{arctg}\frac{x}{a}\Big]_0^{\to\infty} \to \frac{\pi}{2a}$

(2.0) y por lo tanto la integral converge.

Para $a = 0$ queda $\int_0^\infty \frac{\text{arctg}\, x}{x^2}dx$ que es mixta $= \int_0^1 \frac{\text{arctg}\, x}{x^2} + \int_1^\infty \frac{\text{arctg}\, x}{x^2}$

(2.0) donde $\int_0^1 \frac{\text{arctg}\, x}{x^2}dx$ diverge al comparar con $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$ que diverge $(2>1)$

Basta con que $\int_0^1 \frac{\text{arctg}}{x^2}$ diverja para que $\int_0^\infty \frac{\text{arctg}\, x}{x^2}dx$ diverge.

Pauta Problema 3

Γ parametrizada por $r(t) = \left(t, \sqrt{t^2-1}, \ln(t+\sqrt{t^2-1})\right)$ $t \geq 1$

i) Longitud de Γ en función de t y parametrización en longitud de arco s.

$$s = \int_1^t \left\|\frac{dr}{dt}\right\| dt \quad \text{con} \quad \frac{dr}{dt} = \left(1, \frac{\cancel{2}t}{\cancel{2}\sqrt{t^2-1}}, \frac{1+\frac{t}{\sqrt{t^2-1}}}{t+\sqrt{t^2-1}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{dt} = \left(1, \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}, \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\right) \quad y \quad \left\|\frac{dr}{dt}\right\| = \sqrt{1+\frac{t^2}{t^2-1}+\frac{1}{t^2-1}}$$

1.0 $\Rightarrow \left\|\frac{dr}{dt}\right\| = \sqrt{\frac{2t^2}{t^2-1}} = \frac{\sqrt{2}\,t}{\sqrt{t^2-1}}$

Sigue que $s = \int_1^t \frac{\sqrt{2}\,t\,dt}{\sqrt{t^2-1}} = \sqrt{2}\int_1^t \frac{t\,dt}{\sqrt{t^2-1}} = \sqrt{2}\sqrt{t^2-1}\Big|_1^t = \sqrt{2}\sqrt{t^2-1}$

1.0 así, $s = \sqrt{2t^2-2}$ y $s^2 = 2t^2-2 \Rightarrow t^2 = \frac{s^2+2}{2} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{s^2+2}{2}}$

Entonces la arcoparametrización queda

1.0 $$\sigma(s) = \left(\sqrt{\frac{s^2+2}{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}}, \ln\left(\frac{\sqrt{s^2+2}+s}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

0.5 Para $T(t) = \frac{dr}{dt}\Big/\left\|\frac{dr}{dt}\right\| = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}t}{\sqrt{t^2-1}}}\left(1, \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}, \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{t^2-1}}{t}, 1, \frac{1}{t}\right)$

Para $N(t) = \frac{dT}{dt}\Big/\left\|\frac{dT}{dt}\right\|$ con $\frac{dT}{dt} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{t^2\sqrt{t^2-1}}, 0, -\frac{1}{t^2}\right)$

$$y \quad \left\|\frac{dT}{dt}\right\| = \frac{1}{\sqrt{2}t^2}\sqrt{\frac{1}{t^2-1}+1} = \frac{\cancel{t}}{\sqrt{2}t^{\cancel{2}}}\frac{1}{\sqrt{t^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}t\sqrt{t^2-1}}$$

1.5 Entonces $N(t) = \left(\frac{1}{t}, 0, -\frac{\sqrt{t^2-1}}{t}\right)$

Para $K(t) = \left\|\frac{dT}{dt}\right\|\Big/\left\|\frac{dr}{dt}\right\| = \frac{1}{\sqrt{2}t\cancel{\sqrt{t^2-1}}}\Big/\frac{\sqrt{2}t}{\cancel{\sqrt{t^2-1}}} = \frac{1}{2t^2}$

1.0 $$K(t) = \frac{1}{2t^2}$$