Control 3, MA-1A2 Cálculo Diferencial e Integral
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile
Semestre 2007/2 (3 de Noviembre)

P1) a) Una hormiga, que se encuentra inicialmente en el origen, sube por un alambre parametrizado por las ecuaciones

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \cos t \\ t^2 \operatorname{sen} t \\ \frac{1}{\sqrt{3}} t^3 \end{pmatrix}, \qquad t \geq 0.$$

Determine a qué distancia del plano OXY se encuentra la hormiga cuando ha recorrido una distancia $d = \frac{14}{3}$ por el alambre.

Solución

$$\vec{r}'(t) = \begin{pmatrix} 2t \cos t - t^2 \operatorname{sen} t \\ 2t \operatorname{sen} t + t^2 \cos t \\ \sqrt{3} t^2 \end{pmatrix}, \qquad t \geq 0.$$

.... 0.5 ptos.

$$s'(t) = \sqrt{4t^2 + 4t^4} = 2t\sqrt{1+t^2}$$

.... 0.5 ptos.

$$s(t) = \int_0^t 2\tau\sqrt{1+\tau^2}\,d\tau = \frac{2}{3}(1+\tau^2)^{3/2}\Big|_0^t = \frac{2}{3}\left\{(1+t^2)^{3/2} - 1\right\}$$

.... 1 pto.

$$s(t) = \frac{14}{3} \Longrightarrow (1+t^2)^{3/2} = 8 \Longrightarrow t = \sqrt{3}$$

.... 0.5 ptos.

$$t = \sqrt{3} \Longrightarrow z = 3$$

.... 0.5 ptos.

b) Una curva está parametrizada por las ecuaciones

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} a\cos t \\ a \operatorname{sen} t \\ f(t) \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

donde $a > 0$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función infinitamente derivable.
Determine todas las funciones f de modo que el vector normal a la curva sea siempre perpendicular al eje OZ (es decir que $\hat{N}(t) \cdot \hat{k} = 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$).

Solución

$$\vec{r}'(t) = \begin{pmatrix} -a \operatorname{sen} t \\ a\cos t \\ f'(t) \end{pmatrix}$$

.... 0.5 ptos.

$$s'(t) = \sqrt{a^2 + f'^2} \quad = \|\, r'(t) \,\|$$

.... 0.5 ptos.

$$\hat{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{s(t)} = \left(a^2 + f'^2\right)^{-1/2} \begin{pmatrix} -a \operatorname{sen} t \\ a\cos t \\ f'(t) \end{pmatrix}$$

.... 0.5 ptos.

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{T}}{dt} &= -\frac{1}{2}\left(a^2 + f'^2\right)^{-3/2} 2f'f'' \begin{pmatrix} -a \operatorname{sen} t \\ a\cos t \\ f'(t) \end{pmatrix} + \left(a^2 + f'^2\right)^{-1/2} \begin{pmatrix} -a\cos t \\ -a \operatorname{sen} t \\ f''(t) \end{pmatrix} \\ &= \left(a^2 + f'^2\right)^{-3/2} \begin{pmatrix} af'f'' \operatorname{sen} t - a(a^2 + f'^2)\cos t \\ -af'f''\cos t - a(a^2 + f'^2)\operatorname{sen} t \\ a^2 f''(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

.... 0.5 ptos.

$$\hat{N} = \frac{\frac{d\hat{T}}{dt}}{\left\| \frac{d\hat{T}}{dt} \right\|}$$

.... 0.5 ptos.

$$\hat{N} \cdot \hat{k} = 0 \iff \frac{d\hat{T}}{dt} \cdot \hat{k} = 0 \iff af''(t) = 0$$

.... 0.5 ptos.

Todas las funciones f para las cuales el vector normal a la curva sea siempre perpendicular al eje OZ son las que tienen segunda derivada nula, es decir, del tipo $f(t) = mt + n$.

P2) Considere la función $f : [0, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -\ln(1 - x^2)$.

a) Calcule el largo de la curva $\Gamma = \{(x, f(x)) : x \in [0, \frac{1}{2}]\}$.

Solución

$$f'(x) = -\frac{1}{1-x^2}(-2x) = \frac{2x}{1-x^2}$$

$$1 + f'^2(x) = 1 + \frac{4x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{(1+x^2)^2}{(1-x^2)^2}$$

$$ds = \frac{1+x^2}{1-x^2}dx$$

.... 1 pto.

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{1/2} \frac{1+x^2}{1-x^2}dx = \int_0^{1/2} \left\{ \frac{2}{(1-x)(1+x)} - 1 \right\} dx \\ &= \int_0^{1/2} \left\{ \frac{1}{(1-x)} + \frac{1}{(1+x)} - 1 \right\} dx \\ &= \Big\{ -\ln(1-x) + \ln(1+x) - x \Big\}_0^{1/2} \\ &= \ln(3) - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

.... 1 pto.

b) Calcule el Volumen del sólido de revolución engendrado por la rotación en torno al eje OY de la región $R = \{(x, y) : x \in [0, \frac{1}{2}], 0 \leq y \leq f(x)\}$.

Solución

$$V = -2\pi \int_0^{1/2} x \ln(1-x^2)dx, \qquad u = 1 - x^2, \quad du = -2xdx$$

.... 1 pto.

$$= \pi \int_1^{3/4} \ln u du = \pi\Big(u \ln u - u\Big)_1^{3/4} = \pi\Big(\frac{4}{3}\ln\frac{4}{3} - \frac{1}{3}\Big)$$

.... 1 pto.

c) Calcule el área del manto generado por la rotación en torno al eje OY de Γ.

Solución

$$S = \int_0^{1/2} 2\pi x ds$$

.... 1 pto.

$$\begin{aligned} &= \int_0^{1/2} 2\pi x \frac{1+x^2}{1-x^2} dx = 2\pi \int_0^{1/2} \left\{ \frac{2x}{(1-x^2)} - x \right\} dx \\ &= 2\pi \Big\{ -\ln(1-x^2) - \frac{x^2}{2} \Big\}_0^{1/2} \\ &= 2\pi \Big\{ \ln(\tfrac{4}{3}) - \tfrac{1}{8} \Big\} \end{aligned}$$

.... 1 pto.

P3) Un trompo se genera por la rotación en torno al eje OX de la curva $OABCD$ mostrada en la figura.

a) Escriba, en términos de los datos R y φ, las ecuaciones de las funciones que definen los tramos OA, AB y BC de la curva y encuentre las coordenadas de los puntos A, B y C.

Solución

Tramo OA: $f_1(x) = x\operatorname{tg}\varphi$ .... 0.4 pto.

Tramo AB: $f_2(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ .... 0.4 pto.

Tramo BC: $f_3(x) = 1$ .... 0.2 pto.

Punto A: $A(R\cos\varphi, R\operatorname{sen}\varphi)$ .... 0.4 pto.

Punto B: $B(\sqrt{(R^2-1)}, 1)$ .... 0.4 pto.

Punto C: $C(R+1, 1)$ .... 0.2 pto.

b) Escriba las 3 integrales que permiten calcular el Volumen del trompo y calcúlelas.

Solución

$$V_1 = \pi \int_0^{x_A} f_1^2(x)dx$$
$$V_2 = \pi \int_{x_A}^{x_B} f_2^2(x)dx$$
$$V_3 = \pi \int_{x_B}^{x_C} f_3^2(x)dx$$

.... 0.5 pto.

$$V_1 = \pi\operatorname{tg}^2\varphi \int_0^{R\cos\varphi} x^2 dx = \frac{\pi}{3}R^3 \operatorname{sen}^2\varphi\cos\varphi$$

.... 0.5 pto.

$$\begin{aligned} V_2 &= \pi \int_{R\cos\varphi}^{\sqrt{R^2-1}} R^2 - x^2 dx \\ &= \pi R^2(\sqrt{R^2-1} - R\cos\varphi) - \frac{\pi}{3}((R^2-1)^{3/2} - R^3\cos^3\varphi)dx \end{aligned}$$

.... 0.5 pto.

$$\begin{aligned} V_3 &= \pi \int_{\sqrt{R^2-1}}^{R+1} dx \\ &= \pi(R+1-\sqrt{R^2-1}) \end{aligned}$$

.... 0.5 pto.

c) Escriba las 4 integrales que permiten calcular el área total de la superficie exterior del trompo y calcúlelas.

Solución

$$S_1 = 2\pi \int_0^{x_A} f_1 ds_1$$

$$S_1 = 2\pi \int_{x_A}^{x_B} f_2 ds_2$$

$$S_3 = 2\pi \int_{x_B}^{x_C} f_3 ds_3$$

. . . . 0.2 pto.

$$S_4 = \pi$$

. . . . 0.2 pto.

$$ds_1 = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}dx = \sec\varphi dx$$

$$ds_2 = \sqrt{1 + f_2'^2(x)}dx = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}dx$$

$$ds_3 = dx$$

. . . . 0.4 pto.

$$S_1 = 2\pi \int_0^{R\cos\varphi} x\operatorname{tg}\varphi \sec\varphi dx = \pi R^2 \operatorname{sen}\varphi$$

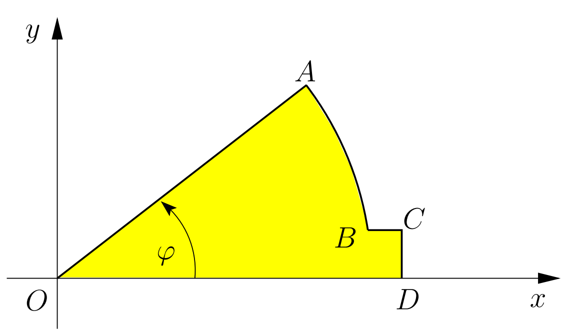
. . . . 0.4 pto.

$$S_2 = 2\pi \int_{R\cos\varphi}^{\sqrt{R^2-1}} R dx = 2\pi R(\sqrt{R^2-1} - R\cos\varphi)$$

. . . . 0.4 pto.

$$S_3 = 2\pi \int_{\sqrt{R^2-1}}^{R+1} dx = 2\pi(R + 1 - \sqrt{R^2-1})$$

. . . . 0.4 pto.



OA: es un trazo recto inclinado en un ángulo φ,

AB: es un arco de circunferencia de radio R y centro en O,

BC: es un trazo horizontal,

CD: es un trazo vertical *de largo 1*, ubicado en $x = R + 1$.

Formulario: $V = \int_a^b \pi f^2$, $V = \int_a^b 2\pi x f$, $L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2}$, $S = \int_a^b 2\pi x\, ds$, $S = \int_a^b 2\pi f(x)\, ds$