Control 3

P1. (i) (2,0 ptos.) Sea $\rho = f(\theta)$ la ecuación en coordenadas polares de una curva Γ. Demuestre que el largo de Γ en el intervalo $[\theta_1, \theta_2]$ es

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{(f(\theta))^2 + (f'(\theta))^2} d\theta$$

(ii) (3,0 ptos.) Demuestre que para el caso en que se cumpla que $f'(\theta) = af(\theta)$, con $a \in \mathbb{R}$, la curvatura de Γ en cualquier θ está dada por

$$\kappa(\theta) = \frac{1}{\sqrt{(f(\theta))^2 + (f'(\theta))^2}}$$

(iii) (1,0 pto.) Considere la curva Γ definida por $\rho = e^{-2\theta}$ con $\theta \in [0, 2\pi]$. Calcule la longitud de Γ en el intervalo $[0, 2\pi]$ y $\kappa(\theta)$.

P2. Considere la curva Γ parametrizada por

$$\vec{r}(t) = \left(\int_0^t e^{-u} \cos(u^2), \int_0^t e^{-u} \operatorname{sen}(u^2), 1 - e^{-t} \right), \quad t \in [0, \infty].$$

Se pide:

(i) (2,0 ptos.) Calcule la longitud de Γ en el intervalo $[0, \infty]$ y encuentre su parametrización en función del arco s.

(ii) (2,0 ptos.) Determine $T, N, \kappa(t)$ (en función de t).

(iii) (2,0 ptos.) Determine $B, \tau(t)$ (en función de t).

P3. (i) (3,0 ptos.) Calcule, si existe, el área de la región bajo la curva

$$f(x) = \frac{x}{(1 + x^2)^{3/2}}$$

en el primer cuadrante.
Indicación: El eje OX es asíntota horizontal de f.

(ii) (3,0 ptos.) Demuestre que el volumen de revolución en torno al eje OX de la región en (i), existe (no lo calcule). Además averigüe si existe el volumen de revolución en torno al eje OY de la misma región definida en (i).

Tiempo 3,0 horas

Pauta Problema 1 (Control 3)

i) La curva Γ es $\rho = f(\theta)$ y parametrizada en polares será

$$\vec{r}(\theta) = (f(\theta)\cos\theta, f(\theta)\sin\theta) \quad \begin{cases} x(\theta) = \rho\cos\theta \\ y(\theta) = \rho\sin\theta \end{cases}$$

0.5 Entonces $r'(\theta) = (f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta, f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta)$

$$\Rightarrow \|r'(\theta)\| = \sqrt{(f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta)^2 + (f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta)^2}$$

$$\|r'(\theta)\| = \sqrt{(f(\theta))^2 + (f'(\theta))^2}$$

1.5 Sigue que $L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \|r'(\theta)\| \, d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{(f(\theta))^2 + (f'(\theta))^2} \, d\theta$

ii) Primeramente calculamos $T = \dfrac{r'(\theta)}{\|r'(\theta)\|}$ considerando $f'(\theta) = a f(\theta)$

reemplazado en $r'(\theta)$ del punto (i)

Así, $r'(\theta) = (a f(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta, a f(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta)$

1.0 entonces $\|r'(\theta)\| = |f(\theta)|\sqrt{a^2+1}$ y $T = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}(a\cos\theta - \sin\theta, a\sin\theta + \cos\theta)$

1.0 Ahora, $\dfrac{dT}{d\theta} = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}(-a\sin\theta - \cos\theta, a\cos\theta - \sin\theta)$ y $\left\|\dfrac{dT}{d\theta}\right\| = \dfrac{\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{a^2+1}} = 1$

Sigue que $K(\theta) = \left\|\dfrac{dT}{d\theta}\right\| / \left\|\dfrac{d\vec{r}}{d\theta}\right\| = \dfrac{1}{|f(\theta)|\sqrt{a^2+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{f^2(\theta) + (a f(\theta))^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{f^2(\theta) + (f'(\theta))^2}}$

1.0 es decir $K(\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{(f(\theta))^2 + (f'(\theta))^2}}$.

iii) Sea $\rho = f(\theta) = e^{-2\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $f'(\theta) = -2e^{-2\theta}$

0.5 Longitud $L = \int_0^{2\pi} \sqrt{f^2 + (f')^2} \, d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{e^{-4\theta} + 4e^{-4\theta}} = \sqrt{5}\int_0^{2\pi} e^{-2\theta} d\theta = \sqrt{5}\left[-\frac{1}{2}e^{-2\theta}\right]_0^{2\pi} = \frac{\sqrt{5}}{2}\left[1 - e^{-4\pi}\right]$

0.5 $K(\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{f^2 + (f')^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{e^{-4\theta} + 4e^{-4\theta}}} = \dfrac{e^{2\theta}}{\sqrt{5}}$

Pauta Problema 2 (Control 3)

i) Γ parametrizada por $\vec{r}(t)=\left(\int_0^t e^{-u}\cos(u^2)du, \int_0^t e^{-u}\operatorname{sen}(u^2)du, 1-e^{-t}\right)$

Longitud de Γ en $t\in[0,\infty)$

$$r'(t)=\left(e^{-t}\cos(t^2), e^{-t}\operatorname{sen}(t^2), e^{-t}\right) \Rightarrow \|r'(t)\|=\sqrt{e^{-2t}\cos^2(t^2)+e^{-2t}\operatorname{sen}^2(t^2)+e^{-2t}}$$

Así $\|r'(t)\|=\sqrt{2}e^{-t}$

Entonces $L=\int_0^\infty \sqrt{2}e^{-t}=\sqrt{2}\int_0^\infty e^{-t}dt=\sqrt{2}\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-t}dt=\sqrt{2}\lim_{b\to\infty}\left[-e^{-t}\right]_0^b$

(1.0) $\therefore L=\sqrt{2}$

Para parametrizar en función del arco s se tiene

$$s=\int_0^t \sqrt{2}e^{-u}du=\sqrt{2}(1-e^{-t}) \Rightarrow \frac{s}{\sqrt{2}}=1-e^{-t} \Rightarrow t=-\ln\left(1-\frac{s}{\sqrt{2}}\right)$$

(1.0) Así, $\vec{r}(t(s))=\vec{\sigma}(s)=\left(\int_0^{-\ln(1-\frac{s}{\sqrt{2}})} e^{-u}\cos(u^2)du, \int_0^{-\ln(1-\frac{s}{\sqrt{2}})} e^{-u}\operatorname{sen}(u^2)du, \frac{s}{\sqrt{2}}\right)$

ii) $T(t)$, $N(t)$ y $K(t)$

(0.5) $T(t)=\frac{r'(t)}{\|r'(t)\|}=\frac{1}{e^{-t}\sqrt{2}}\left(e^{-t}\cos(t^2), e^{-t}\operatorname{sen}(t^2), e^{-t}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos(t^2), \operatorname{sen}(t^2), 1\right)$

(0.5) $\frac{dT}{dt}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-2t\operatorname{sen}(t^2), 2t\cos(t^2), 0\right)$; $\left\|\frac{dT}{dt}\right\|=\frac{2t}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}t$

Se sigue que $N(t)=\frac{dT}{dt}\Big/\left\|\frac{dT}{dt}\right\|=\frac{\cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}2t}\left(-\operatorname{sen}(t^2), \cos(t^2), 0\right)}{\cancel{\sqrt{2}t}}=\left(-\operatorname{sen}(t^2), \cos(t^2), 0\right)$

(1.0) y $K(t)=\frac{\left\|\frac{dT}{dt}\right\|}{\left\|\frac{d\hat{s}}{dt}\right\|}=\frac{\sqrt{2}t}{\sqrt{2}e^{-t}}=te^t$

iii) $B=T\times N \Rightarrow B=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1/\sqrt{2}\cos t^2 & 1/\sqrt{2}\operatorname{sen} t^2 & 1/\sqrt{2} \\ -\operatorname{sen} t^2 & \cos t^2 & 0\end{vmatrix}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos(t^2), \operatorname{sen}(t^2), -1\right)$ (1.0)

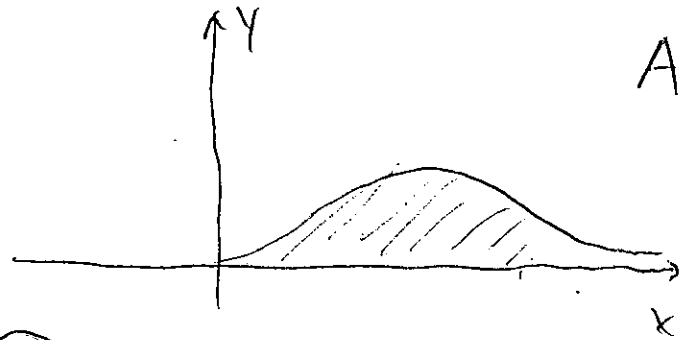
$\tau(t)=-N(t)\cdot\frac{dB}{dt}\Big/\left\|\frac{d\hat{s}}{dt}\right\|=\left(\operatorname{sen}(t^2), -\cos(t^2), 0\right)\cdot\frac{(-2t\operatorname{sen}t^2, 2t\cos t^2, 0)(-\frac{1}{\sqrt{2}})}{\sqrt{2}e^{-t}}$

(1.0) $\Rightarrow \tau(t)=te^t\left(\operatorname{sen}^2(t^2)+\cos^2(t^2)\right)=te^t$

Cálculo Diferencial e Integral (11-2)

Pauta Problema 3 (Control 3)

P3. i) Area bajo la curva $f(x)=\frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}$ en el 1er cuadrante.



$$A=\int_0^\infty \frac{x\,dx}{(1+x^2)^{3/2}}$$ se puede reemplazar por ejemplo $1+x^2=u^2$, $2x\,dx=2u\,du$

Así: $$A=\int_1^\infty \frac{u\,du}{(u^2)^{3/2}}=\int_1^\infty \frac{du}{u^3}$$

(2.0)

El area existe pues la integral converge. Es del tipo $\int_1^\infty \frac{du}{u^\alpha}$ con $\alpha>1$ ($\alpha=3$)

Su valor $$A=\int_1^\infty \frac{du}{u^3}=\lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{du}{u^3}=\lim_{b\to\infty}\left[\frac{-1}{2u^2}\right]_1^b=\lim_{b\to\infty}\left[1-\frac{1}{b^2}\right]\frac{1}{2}$$

(1.0) Sigue que $A=1/2$

ii) El volumen de revolución en torno a Ox es $V=\pi\int_0^\infty f(x)^2\,dx$

$$\Rightarrow V_{ox}=\pi\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^3}$$ y la integral $$\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^3}=\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^3}+\int_1^\infty \frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^3}$$

donde la primera integral ($\int_0^1$) es propia y la segunda se puede comparar.

(1.5) $\frac{x^2}{(1+x^2)^3}<\frac{x^2}{x^6}=\frac{1}{x^4}$ y $\int_1^\infty \frac{dx}{x^4}$ converge ($\alpha=4>1$)

Se concluye que Vox EXISTE.

Pero $$V_{oy}=2\pi\int_0^\infty x f(x)\,dx=2\pi\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^{3/2}}=2\pi\Big[\underbrace{\int_0^1}_{\text{Propia}}+\underbrace{\int_1^\infty}_{\text{impropia}}\Big]$$ basta comparar $\int_1^\infty \frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^{3/2}}$ con $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ que diverge con $$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{(1+x^2)^{3/2}}}{1/x}=\lim \frac{x^3}{(1+x^2)^{3/2}}=1$$

(1.5) y por lo tanto Voy diverge, es decir Voy NO EXISTE.