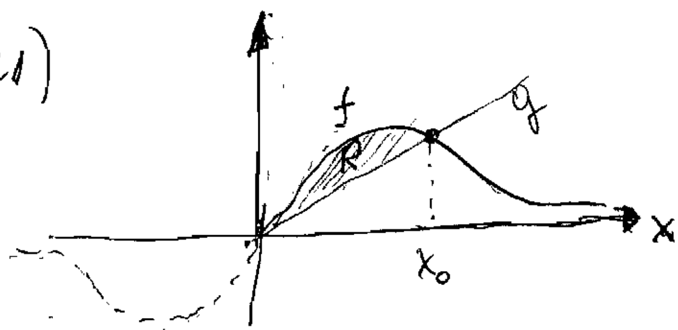
Cálculo Diferencial e Integral - Control 3
Pauta Problema 1

a) Considere las funciones reales $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$ y $g(x)=mx$, $m\in(0,1)$

a1) Calcule el área de la región R que en el primer cuadrante encierran f y g

a2) Calcule el volumen del sólido de revolución generado por la rotación de R en torno al eje OY.

a1)



Para x_0 buscamos la intersección de ambas curvas.

$$f(x)=g(x) \iff \frac{x}{1+x^2}=mx$$

de donde $x=0$ (evidente) y $\frac{1}{1+x^2}=m$

0.5 $\Rightarrow 1+x^2=\frac{1}{m}$ y $x_0=\sqrt{\frac{1-m}{m}}$, $m\in(0,1)$

El área será $A=\int_0^{x_0}(f(x)-g(x))\,dx=\int_0^{x_0}\left(\frac{x}{1+x^2}-mx\right)dx$

$$=\left(\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}mx^2\right)\Big|_0^{x_0}=\frac{1}{2}\left(\ln(1+x_0^2)-mx_0^2\right)=\frac{1}{2}\left[\ln\left(1+\frac{1-m}{m}\right)-m\frac{1-m}{m}\right]$$

1.0 Sigue que $A=\frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{1}{m}\right)-1+m\right)=\frac{1}{2}(m-1-\ln m)$

a2) El volumen en torno al eje OY será.

$$V=2\pi\int_0^{x_0}x\left(f(x)-g(x)\right)dx=2\pi\int_0^{x_0}x\left(\frac{x}{1+x^2}-mx\right)dx$$

1.0 $$=2\pi\int_0^{x_0}\left(\frac{x^2}{1+x^2}-mx^2\right)dx=2\pi\int_0^{x_0}\left[\frac{1+x^2-1}{1+x^2}-mx^2\right]dx=2\pi\int_0^{x_0}\left[1-\frac{1}{1+x^2}-mx^2\right]dx$$

0.5 $V_{oy}=2\pi\left[x-\arctan x-m\frac{x^3}{3}\right]_0^{x_0}=2\pi\left[x_0-\arctan x_0-\frac{1}{3}mx_0^3\right]$ donde $x_0=\sqrt{\frac{1-m}{m}}$.

b) Considere la curva en $\mathbb{R}^2$ parametrizada por

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \int_1^t \frac{\cos u}{u}\, du \\ \int_1^t \frac{\operatorname{sen} u}{u}\, du \end{pmatrix}, \quad t \in [1, t_0]$$

Calcule el largo de la curva entre $t=1$ y $t=t_0$ sabiendo que $t=t_0$ es el primer instante >1, donde el vector tangente a la curva es vertical.

Calculamos primero el vector tangente T

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{\cos t}{t} \\ \frac{\operatorname{sen} t}{t} \end{pmatrix}$$ donde se aplicó el T.F.C. a cada integral.

(1.0) además $\left\|\frac{d\vec{r}}{dt}\right\| = \sqrt{\frac{\cos^2 t}{t^2} + \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t^2}} = \frac{1}{t}, \quad t > 1$

Así $$T = \frac{\frac{d\vec{r}}{dt}}{\left\|\frac{d\vec{r}}{dt}\right\|} = \frac{1}{1/t}\begin{pmatrix} \frac{\cos t}{t} \\ \frac{\operatorname{sen} t}{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \operatorname{sen} t \end{pmatrix}$$ ó bien $T = (\cos t)\hat{\imath} + (\operatorname{sen} t)\hat{\jmath}$

T será vertical si $\hat{T}\cdot\hat{\imath} = 0 \Rightarrow \cos t = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots$

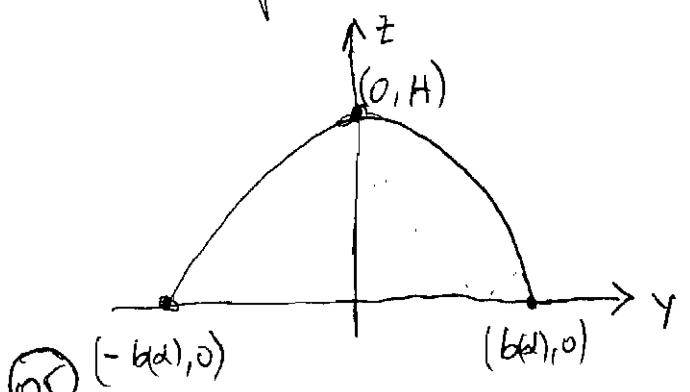
(1.0) y el primer instante >1 se produce para $t_0 = \frac{\pi}{2}$

Entonces la longitud de la curva entre $t=1$ y $t=\frac{\pi}{2}$ será

(1.0) $$L(\Gamma) = \int_1^{\pi/2} \left\|\frac{d\vec{r}}{dt}\right\| dt = \int_1^{\pi/2} \frac{dt}{t} = \ln t \Big|_1^{\pi/2} = \ln\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Pauta Problema 2

a) Primero determinamos, en función de α, la ecuación de la parábola de eje vertical (sombreada) y el área bajo ella.



La ecuación es $z = H - \lambda y^2$

y $(b(\alpha), 0)$ es punto de la parábola.

Entonces $0 = H - \lambda b^2(\alpha) \Rightarrow \lambda = \frac{H}{b^2(\alpha)}$

Así la ecuación es $z = H - \frac{H}{b^2(\alpha)} y^2$

05

El área de la parábola, en función de α será

$$A(\alpha) = \int_{-b(\alpha)}^{b(\alpha)} z(y)\,dy = \int_{-b(\alpha)}^{b(\alpha)} \left[H - \frac{H}{b^2(\alpha)} y^2\right] dy = H\left[y - \frac{1}{b^2(\alpha)} \frac{1}{3} y^3\right]_{-b(\alpha)}^{b(\alpha)}$$

1.0 $= 2H\left[b(\alpha) - \frac{1}{3}\frac{b^3(\alpha)}{b^2(\alpha)}\right]$, así, $A(\alpha) = \frac{4}{3} H\, b(\alpha)$

Como $(\alpha, b(\alpha))$ es punto del círculo basal, $\alpha^2 + b^2(\alpha) = R^2$

0.5 es decir $b(\alpha) = \sqrt{R^2 - \alpha^2}$, de donde $\boxed{A(\alpha) = \frac{4}{3} H \sqrt{R^2 - \alpha^2}}$

El volumen del sólido, en función del área de la sección transversal $A(\alpha)$ será

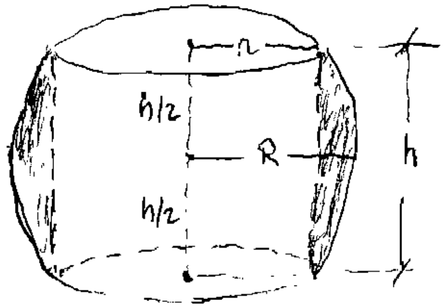
0.5 $$V = \int_{-R}^{R} A(\alpha)\,d\alpha = \int_{-R}^{R} \frac{4}{3} H \sqrt{R^2 - \alpha^2}\,d\alpha = \frac{4}{3} H \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - \alpha^2}\,d\alpha$$

y $\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - \alpha^2}\,d\alpha$ con $\alpha = R \operatorname{sen} t$, $d\alpha = R \cos t\,dt$ queda $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} R^2 \cos^2 t = R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2t}{2}\,dt$

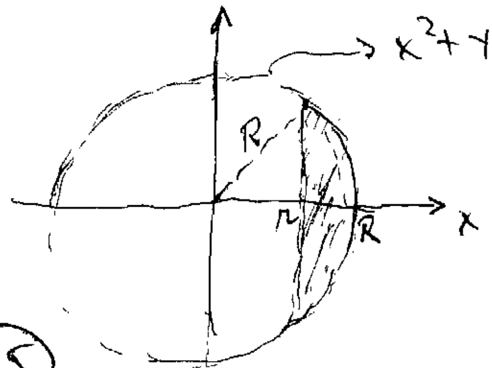
$$= \frac{R^2}{2}\left[t + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2t\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \pi \frac{R^2}{2}$$

1.5 Sigue que $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \frac{R^2}{2} = \frac{2\pi}{3} H R^2$

b) Ambas esferas, luego de ejecutado la perforación cilíndrica se verán de la forma que se indica en la figura



El volumen del sólido resultante se puede calcular rotando en torno al eje OY el area sombreada.



Este será $V_{OY} = \overset{\text{veces}}{2} \cdot 2\pi \int_r^R x\, f(x)\, dx$

donde $f(x) = y = \sqrt{R^2-x^2}$

Asi $V_{OY} = 4\pi \int_r^R x \sqrt{R^2-x^2}\, dx$

0.5

cambiando $u = R^2-x^2$, $du = -2x\,dx$

Entonces $V_{OY} = 4\pi \int_{R^2-r^2}^{0} \sqrt{u}\left(-\frac{1}{2}du\right) = 2\pi \int_0^{R^2-r^2} u^{1/2} du = 2\pi \frac{2}{3} u^{3/2} \Big|_0^{R^2-r^2}$

0.5

Sigue que $V_{OY} = \frac{4\pi}{3}(R^2-r^2)^{3/2}$

Pero $R^2-r^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2$, entonces $V_{OY} = \frac{4\pi}{3}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^2\right]^{3/2} = \frac{4\pi}{3}\frac{h^3}{8}$

Asi $V_{OY} = \frac{\pi}{6} h^3$

Entonces, en cada esfera perforada, el volumen remanente depende solo de la altura del sólido que se forma.

1.0

Asi, $V_1 = \frac{\pi}{6} h_1^3 \wedge V_2 = \frac{\pi}{6} h_2^3$ de donde $V_1 = V_2 \Rightarrow h_1^3 = h_2^3$

$\Rightarrow h_1 = h_2$

Pauta Problema 3

Considere Γ parametrizada por $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 4\cos t \\ 4\,\text{sen}\, t \\ 4\cos t \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$

a) Calcular $\hat{T}(t)$, $\hat{N}(t)$, $\kappa(t)$

$\vec{r}\,'(t) = 4(-\text{sen}\,t, \cos t, -\text{sen}\,t)$ y $\|\vec{r}\,'(t)\| = 4\sqrt{1+\text{sen}^2 t}$

1.0 Entonces $\hat{T} = \dfrac{\frac{d\vec{r}}{dt}}{\|\frac{d\vec{r}}{dt}\|} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\text{sen}^2 t}}(-\text{sen}\,t, \cos t, -\text{sen}\,t)$

$$\frac{dT}{dt} = \left(\left(\frac{-\text{sen}\,t}{\sqrt{1+\text{sen}^2 t}}\right)', \left(\frac{\cos t}{\sqrt{1+\text{sen}^2 t}}\right)', \left(\frac{-\text{sen}\,t}{\sqrt{1+\text{sen}^2 t}}\right)' \right)$$

donde $\left(\dfrac{-\text{sen}\,t}{\sqrt{1+\text{sen}^2 t}}\right)' = -\dfrac{\cos t\sqrt{1+\text{sen}^2 t} - \text{sen}\,t\,\frac{\text{sen}\,t\cos t}{\sqrt{1+\text{sen}^2 t}}}{1+\text{sen}^2 t} =$

0.5 $= -\dfrac{\cos t(1+\text{sen}^2 t) - \text{sen}^2 t\cos t}{(1+\text{sen}^2 t)^{3/2}} = -\dfrac{\cos t}{(1+\text{sen}^2 t)^{3/2}}$

y $\left(\dfrac{\cos t}{\sqrt{1+\text{sen}^2 t}}\right)' = \dfrac{-\text{sen}\,t\sqrt{1+\text{sen}^2 t} - \cos t\,\frac{\text{sen}\,t\cos t}{\sqrt{1+\text{sen}^2 t}}}{1+\text{sen}^2 t} = -\dfrac{\text{sen}\,t(1+\text{sen}^2 t) + \text{sen}\,t\cos^2 t}{(1+\text{sen}^2 t)^{3/2}} =$

0.5 $= -\dfrac{\text{sen}\,t(\text{sen}^2 t + \cos^2 t) + \text{sen}\,t}{(1+\text{sen}^2 t)^{3/2}} = -\dfrac{2\,\text{sen}\,t}{(1+\text{sen}^2 t)^{3/2}}$

Entonces $\dfrac{dT}{dt} = \left(-\dfrac{\cos t}{(1+t^2)^{3/2}}, \dfrac{-2\,\text{sen}\,t}{(1+t^2)^{3/2}}, -\dfrac{\cos t}{(1+t^2)^{3/2}} \right)$

y $\left\|\dfrac{dT}{dt}\right\| = \sqrt{\dfrac{\cos^2 t + 4\,\text{sen}^2 t + \cos^2 t}{(1+\text{sen}^2 t)^3}} = \sqrt{\dfrac{2(\cos^2 t + 2\,\text{sen}^2 t)}{(1+\text{sen}^2 t)^3}} = \sqrt{2}\sqrt{\dfrac{1+\text{sen}^2 t}{(1+\text{sen}^2 t)^3}}$

1.0 $\therefore \left\|\dfrac{dT}{dt}\right\| = \dfrac{\sqrt{2}}{1+\text{sen}^2 t}$

0.5 Así, $\hat{N} = \dfrac{dT}{dt}\Big/\left\|\dfrac{dT}{dt}\right\| = \dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1+\text{sen}^2 t}}(-\cos t, -2\,\text{sen}\,t, -\cos t)$

0.5 y $\kappa(t) = \dfrac{\|\frac{dT}{dt}\|}{\|\frac{d\vec{r}}{dt}\|} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{1+\text{sen}^2 t}}{4\sqrt{1+\text{sen}^2 t}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4(1+\text{sen}^2 t)^{3/2}}$ (Curvatura)

b) Calcular $\hat{B}(t)$ y $\tau(t)$

Se sabe que $\hat{B} = \hat{T} \times \hat{N}$, entonces

$$\hat{B}(t) = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 t}}\left(-\operatorname{sen} t, \cos t, -\operatorname{sen} t\right) \times \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 t}}\left(-\cos t, -2\operatorname{sen} t, -\cos t\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}(1+\operatorname{sen}^2 t)} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -\operatorname{sen} t & \cos t & -\operatorname{sen} t \\ -\cos t & -2\operatorname{sen} t & -\cos t \end{vmatrix}$$

1.0 $\longrightarrow$ $$= \frac{1}{\sqrt{2}(1+\operatorname{sen}^2 t)}\left[-(\cos^2 t + 2\operatorname{sen}^2 t)\,\hat{i} - \underbrace{(\operatorname{sen} t \cos t - \operatorname{sen} t \cos t)}_{\to 0}\,\hat{j} + (2\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t)\,\hat{k}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}(1+\operatorname{sen}^2 t)}\left[-(1+\operatorname{sen}^2 t) \;,\; 0 \;,\; (1+\operatorname{sen}^2 t)\right]$$

0.5 $\longrightarrow$ Así, $\hat{B}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)$

Para $\tau(t)$, se sabe que $\tau(t) = -\hat{N}(t) \cdot \frac{d\hat{B}}{dt}$

Pero $\hat{B} = c^{te}$ y por lo tanto $\frac{d\hat{B}}{dt} = 0$

0.5 $\longrightarrow$ Sigue que $\tau(t) = 0$

Alternativa para τ:

OBSERVACION: De la parametrización para $\vec{r}(t)$, también puede deducirse que $x(t) = z(t) = 4\cos t \quad \forall t$

Es decir la curva está contenida en el plano $x = z$ y por lo tanto es curva plana con $\tau(t) = 0$