CONTROL 3

P1. a) (3,0 ptos.) Dada la elipse de ecuación $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$, encontrar la superficie del manto del sólido de revolución generado al rotar la elipse en torno al eje OX.

b) Considere la función $f(x) = \frac{1}{3}\sqrt{x}(3-x)$ definida en $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$.

i) (2,0 ptos.) Determine la longitud de la curva $y = f(x)$ desarrollada en el primer cuadrante entre sus ceros.

ii) (1,0 pto.) Calcule la superficie del manto del sólido de revolución que se genera al rotar en torno al eje OY la región del primer cuadrante bajo la curva $y = f(x)$.

P2. a) Una partícula recorre la curva Γ parametrizada por:

$$r(t) = (3\,\mathrm{sen}(t), 4t, 3\cos(t)); \quad t \in [0, \infty)$$

i) (1,0 pto.) Determine el instante t_0 en que la partícula ha recorrido una distancia $s = 10\pi$ sobre Γ e indique el punto de la curva el que se encuentra la partícula en ese instante.

ii) (0,5 ptos.) Deduzca la parametrización en longitud de arco s para Γ.

iii) (2,5 ptos.) Calcule $T(s), N(s)$ y $\kappa(s)$ (curvatura), $\forall s \geq 0$.

b) (2,0 ptos.) Considere la espiral C parametrizada por

$$r(\theta) = (e^{-2\theta}\cos(\theta), e^{-2\theta}\,\mathrm{sen}(\theta)), \quad \theta \in [0, \infty).$$

Determine la longitud de la **primera espira** de C y calcule, si es que existe, la longitud total de C. Fundamente su respuesta.

P3. a) (3,0 ptos.) Sea f la función definida sobre el intervalo $[a, \infty)$, $a > 0$, acotada y con derivada continua. Demuestre que la integral

$$\int_a^\infty \frac{f'(x)}{x^\alpha}dx$$

existe si $\alpha > 0$.

Indicación: Integre por partes.

b) Estudie la convergencia o divergencia de las siguientes integrales impropias, indicando su especie:

i) (1,5 ptos.) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ ii) (1,5 ptos.) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}(2x)}{x}dx$

Pueden ser útiles las siguientes fórmulas:

$$L = \int_a^b \sqrt{1+(f')^2}; \quad V = \pi\int_a^b y^2dx; \quad V = 2\pi\int_a^b xydx; \quad S = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}dx$$

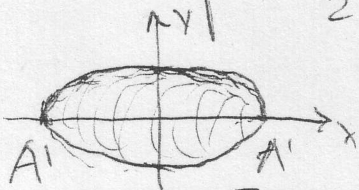
Justifique cada uno de sus pasos

Tiempo: 3:00

Calculo Diferencial e Integral (MA1002) (13-2)

Control 3 Pauta Problema 1

a) La elipse $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ corta el eje OX en $A'(-\sqrt{2},0)$, $A(\sqrt{2},0)$



$y^2=\frac{1}{2}(2-x^2) \Rightarrow y=\frac{\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{2}}$; $y'=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{-x}{\sqrt{2-x^2}}$

La superficie del elipsoide de revolución será

(1.0) $S_{OX}=2\pi\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} y\sqrt{1+(y')^2}\,dx = 2\pi\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{x^2}{2(2-x^2)}}\,dx = \cancel{2}\pi\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\frac{\cancel{\sqrt{2-x^2}}}{\cancel{\sqrt{2}}}\frac{\sqrt{4-2x^2+x^2}}{\cancel{\sqrt{2}}\cancel{\sqrt{2-x^2}}}\,dx$

$S_{OX}=\pi\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}\,dx$ y por simetria $S_{OX}=2\overset{\text{veces}}{}\pi\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}\,dx$

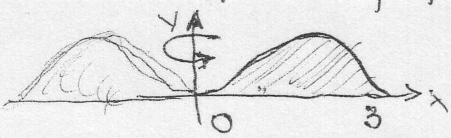
Sustituyendo $x=2\,\mathrm{sen}\,t$, $dx=2\cos t\,dt$ queda $S_{OX}=2\pi\int_0^{\pi/4}2\underbrace{\sqrt{1-\mathrm{sen}^2 t}}_{\cos t}\,2\cos t\,dt=$

$=8\pi\int_0^{\pi/4}\cos^2 t = \overset{4}{\cancel{8}}\pi\int_0^{\pi/4}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = 4\pi\left[t+\frac{1}{2}\mathrm{sen}\,2t\right]_0^{\pi/4}=4\pi\left[\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right]$

(2.0) Sigue que $S_{OX}=\pi(\pi+2)$

b) i) $f(x)=\frac{1}{3}\sqrt{x}(3-x)$, sus ceros son $\{0,3\}$; $f(x)=x^{1/2}-\frac{1}{3}x^{3/2}$

$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}x^{-1/2}-\frac{1}{2}x^{1/2}$.



La longitud de $y=f(x)$ entre sus ceros será $L=\int_0^3\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$

(1.0) $\Rightarrow L=\int_0^3\sqrt{1+\frac{1}{4}(x^{-1/2}-x^{1/2})^2} = \int_0^3\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}-2+x\right)} = \int_0^3\sqrt{\underbrace{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+2+x\right)}_{(\ )^2\ \text{perfecto}}}\,dx$

$\Rightarrow L=\frac{1}{2}\int_0^3\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^3(x^{-1/2}+x^{1/2})\,dx = \frac{1}{2}\left[2x^{1/2}+\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^3$

(1.0) Sigue que $L=\frac{1}{2}\left(2\sqrt{3}+\frac{2}{\cancel{3}}\cancel{3}\sqrt{3}\right)=2\sqrt{3}$

ii) La superficie del sólido de revolución en torno al eje OY está dada por $S_{OY}=2\pi\int_0^3 x\underbrace{\sqrt{1+(y')^2}}\,dx = \cancel{2}\pi\int_0^3 x\underbrace{(x^{-1/2}+x^{1/2})\frac{1}{\cancel{2}}}\,dx = \pi\int_0^3(x^{1/2}+x^{3/2})\,dx$

calculado en i)

(1.0) $\Rightarrow S_{OY}=\pi\left[\frac{2}{3}x^{3/2}+\frac{2}{5}x^{5/2}\right]_0^3=\pi\left(2\sqrt{3}+\frac{2}{5}9\sqrt{3}\right)=\frac{28}{5}\pi\sqrt{3}$

Pauta Problema 2

a) $r(t) = (3\,\text{sen}\,t, 4t, 3\cos t)$, $t \in [0,\infty)$

i) $r'(t) = (3\cos t, 4, -3\,\text{sen}\,t)$ y $\|r'(t)\| = \sqrt{9\cos^2 t + 16 + 9\,\text{sen}^2 t} = 5$

La distancia por Γ entre $t=0$ y $t=t_0$ es $s = 10\pi$ y $s = \int_0^{t_0} \|r'(t)\|\,dt$

$$\Rightarrow s = 10\pi = \int_0^{t_0} 5\,dt = 5t_0 \Rightarrow t_0 = 2\pi$$ y el punto de

(1.0) Γ para ese instante es $(3\,\text{sen}\,2\pi, 4\cdot 2\pi, 3\cos 2\pi) = (0, 8\pi, 3)$

ii) $s = \int_0^t \|r'(t)\|\,dt = \int_0^t 5\,dt = 5t \Rightarrow t = \frac{s}{5}$, entonces Γ

(0.5) parametrizado en función del arco s es $r(s) = \left(3\,\text{sen}\left(\frac{s}{5}\right), \frac{4}{5}s, 3\cos\left(\frac{s}{5}\right)\right)$

iii) En función del arco s se sabe que $T(s) = \frac{dr(s)}{ds}$

(0.5) $$\Rightarrow T(s) = \frac{d}{ds}\left(3\,\text{sen}\left(\frac{s}{5}\right), \frac{4}{5}s, 3\cos\left(\frac{s}{5}\right)\right) = \left(\frac{3}{5}\cos\left(\frac{s}{5}\right), \frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\,\text{sen}\left(\frac{s}{5}\right)\right)$$

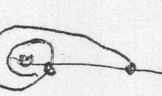
También $K(s) = \left\|\frac{dT}{ds}\right\|$ donde $\frac{dT}{ds} = \left(-\frac{3}{25}\,\text{sen}\left(\frac{s}{5}\right), 0, -\frac{3}{25}\cos\left(\frac{s}{5}\right)\right)$

(1.5) así $K(s) = \sqrt{\left(\frac{3}{25}\right)^2\left(\text{sen}^2\left(\frac{s}{5}\right) + \cos^2\left(\frac{s}{5}\right)\right)} = \frac{3}{25} = cte.$

(0.5) y $N(s) = \frac{dT}{ds} \Big/ \left\|\frac{dT}{ds}\right\| = \frac{dT}{ds}\Big/K = \left(-\text{sen}\left(\frac{s}{5}\right), 0, -\cos\left(\frac{s}{5}\right)\right)$

b) La espiral es $r(\theta) = (e^{-2\theta}\cos\theta, e^{-2\theta}\,\text{sen}\,\theta)$, $\theta \in [0,\infty)$

La longitud para la primera espira se produce en $\theta \in [0, 2\pi]$



Así $L_{1era} = \int_0^{2\pi} \|r'(\theta)\|\,d\theta$ con $r'(\theta) = (-2e^{-2\theta}\cos\theta - e^{-2\theta}\,\text{sen}\,\theta, -2e^{-2\theta}\,\text{sen}\,\theta + e^{-2\theta}\cos\theta)$

(1.0) $$\Rightarrow \|r'(\theta)\| = \sqrt{4e^{-4\theta} + e^{-4\theta}} = \sqrt{5}\,e^{-2\theta} \Rightarrow L_{1era} = \int_0^{2\pi} \sqrt{5}\,e^{-2\theta}\,d\theta = \sqrt{5}\left[-\frac{1}{2}e^{-2\theta}\right]_0^{2\pi}$$

Sigue que $L_{1era} = \frac{\sqrt{5}}{2}(1 - e^{-4\pi})$

Para la longitud TOTAL, $\theta \in [0,\infty)$ y $L = \int_0^\infty \|r'(\theta)\|\,dt = \sqrt{5}\int_0^\infty e^{-2\theta}\,d\theta$

que es una integral impropia convergente $L = \sqrt{5}\lim_{t\to\infty}\int_0^t e^{-2\theta}\,d\theta$

(1.0) $= \sqrt{5}\lim_{t\to\infty}\frac{1}{2}(1 - \underbrace{e^{-2t}}_{0}) = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow L_{TOTAL} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

Pauta Problema 3

a) $\int_a^\infty \frac{f'(x)}{x^\alpha}$ es integral impropia de 1ra especie donde f donde f definida sobre $[a,\infty)$, $\alpha>0$ es acotada y con derivada continua.
Usando la definición $\int_a^\infty \frac{f'(x)}{x^\alpha}dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b \frac{f'(x)}{x^\alpha}dx$ e integrando por partes $u = x^{-\alpha} \to du = -\alpha x^{-\alpha-1}$
$dv = f'(x)dx \to v = f(x)$

Así $\lim_{x\to\infty}\int_a^b \frac{f'(x)}{x^\alpha}dx = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x^\alpha}\Big|_a^b + \alpha\int_a^b \frac{f(x)}{x^{\alpha+1}}dx\right]$

(0.5) Como f es acotada en $[a,\infty)$, $\exists M\in\mathbb{R}^+$ tq $|f(x)|\le M$, entonces

(1.5) $\lim_{b\to\infty}\left(\underbrace{\frac{f(b)}{b^\alpha}}_{\alpha>0}{}^{\to 0} - \frac{f(a)}{a^\alpha}\right) = -\frac{f(a)}{a^\alpha}$ finito además $\frac{|f(x)|}{x^{\alpha+1}} \le \frac{M}{x^{\alpha+1}}$ y por lo tanto $\int_a^\infty \frac{f(x)}{x^{\alpha+1}}dx$ es absolutamente convergente si $M\int_a^\infty \frac{dx}{x^{\alpha+1}}$

(1.0) converge, y esta última converge si $\alpha+1>1$, es decir si $\alpha>0$ //

b) i) $\int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ es impropia mixta, de 1era especie por ∞ y 2ª especie por 0^+

(0.5) Entonces separando $\int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \int_0^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx + \int_1^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ donde.

$\int_0^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \lim_{a\to0^+}\int_a^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$, con $x=u^2$, $dx = 2u\,du$ $\Rightarrow \int_0^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \lim_{a\to0^+} 2\int_{\sqrt{a}}^1 e^{-u}du = \lim_{a\to0^+} 2\left(\frac{1}{e^{\sqrt{a}}} - \frac{1}{e}\right) =$
$= 2(1-e^{-1})$ conv

Análogamente $\int_1^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \lim_{t\to\infty} 2\int_1^{\sqrt{t}} e^{-u}du = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{e} - \cancel{\frac{1}{e^{\sqrt{t}}}}{}^{\to 0}\right)2 = \frac{2}{e} \to$ Converge

(1.0) Así, ambas integrales convergen $\Rightarrow \int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ Converge.

ii) $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}2x}{x}dx$ donde $\frac{\operatorname{sen}2x}{x}$ es continua en 0, de modo que sólo es impropia

(0.5) de primera especie por ∞. Así $\int_0^\infty f = \int_0^1 f + \int_1^\infty f$ y sólo se estudia $\int_1^\infty f$.

(1.0) $\int_1^\infty \frac{\operatorname{sen}2x}{x}dx$ por partes $\to \int_1^\infty \frac{\operatorname{sen}2x}{x}dx = \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{\cos 2x}{x}\Big|_1^t + \frac{1}{2}\int_1^t \frac{\cos 2x}{x^2}dx\right]$ y $\int \left|\frac{\cos}{x^2}\right| \le K\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ que

$\cos(2)$ Conv Absolut.