Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Cálculo Diferencial e Integral 12-2

Control 3

P1. Considere la curva Γ parametrizada por

$$r(t) = (e^{-t} \operatorname{sen} t, e^{-t} \cos t, e^{-t}) \quad t \in [0, \infty].$$

(i) (1,0 pto.) Muestre que Γ es una curva regular y calcule su longitud total.

(ii) (5,0 ptos.) Calcule los vectores T, N, B, la curvatura $\kappa(t)$ y la torsión $\tau(t)$ en cualquier punto de Γ.

P2. (i) (1,5 ptos.) Demuestre que

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^{1/2} + x^2} dx$$

es absolutamente convergente.

(ii) (1,5 ptos.) Dada la integral

$$\int_0^1 \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) dx$$

identifique su especie y calcúlela usando la definición. Decida si converge.

(iii) (3,0 ptos.) Calcule la integral impropia mixta

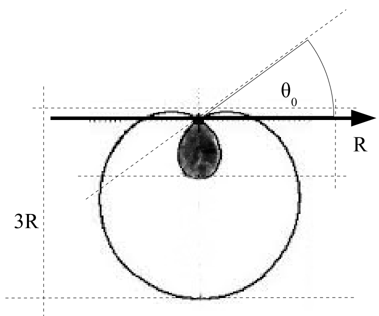
$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2 + a^2} dx$$

donde $a > 0$, fijo, separándola como $\int_0^a + \int_a^\infty$ y usando en cualquiera de ellas la sustitución $x = a^2/y$.

P3. (i) (2,0 ptos.) Calcular la masa de un alambre cuya forma está dada por la curva $r(t) = (t, t^2, t^3)$, $t \in [0, 2]$ y cuya densidad en cada punto es $\rho = \rho(x, y, z) = 2x + 9z$.

(ii) (2,0 ptos.) Calcule la longitud de la cardioide $\rho(\theta) = R(1 + \cos\theta)$, $R > 0$.

(i) (2,0 ptos.) Dada la cardioide $\rho(\theta) = R - 2R \operatorname{sen}\theta$, $R > 0$, se pide calcular el área de la región achurada (ver figura).



Indicación: Encuentre θ_0 tal que $\rho(\theta_0) = 0$.

Justifique cada uno de sus pasos
Tiempo: 3:00

Cálculo Diferencial e Integral (12-2)

Control 3 Pauta Problema 1

$r(t)=(e^{-t}\operatorname{sen} t,\ e^{-t}\cos t,\ e^{-t}),\ t\in[0,\infty)$

i) $r'(t)=(-e^{-t}\operatorname{sen} t+e^{-t}\cos t,\ -e^{-t}\cos t-e^{-t}\operatorname{sen} t,\ -e^{-t})$

$\|r'(t)\|=\sqrt{2e^{-2t}+e^{-2t}}=e^{-t}\sqrt{3}$. Claramente $\left\|\frac{d\vec{r}}{dt}\right\|>0$ de modo que Γ es curva regular. Además $L=\int_0^\infty\left\|\frac{d\vec{r}}{dt}\right\|=\int_0^\infty\sqrt{3}e^{-t}$

$\Rightarrow L=\sqrt{3}\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-t}dt=\sqrt{3}\lim_{b\to\infty}-e^{-t}\Big|_0^b=\sqrt{3}\lim_{b\to\infty}(1-e^{-b})=\sqrt{}$

1.0

ii) $T=\dfrac{\frac{dr}{dt}}{\left\|\frac{dr}{dt}\right\|}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(-\operatorname{sen} t+\cos t,\ -\operatorname{sen} t-\cos t,\ -1)$

0.5

$\dfrac{dT}{dt}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(-\operatorname{sen} t-\cos t,\ \operatorname{sen} t-\cos t,\ 0)$; $\left\|\dfrac{dT}{dt}\right\|=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{2}$

Sigue que $N=\dfrac{dT/dt}{\|dT/dt\|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(-\operatorname{sen} t-\cos t,\ \operatorname{sen} t-\cos t,\ 0)$

1.0

$B=T\times N=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i & j & k \\ -\operatorname{sen}+\cos & -\operatorname{sen}-\cos & -1 \\ -\operatorname{sen}-\cos & \operatorname{sen}-\cos & 0\end{pmatrix}=\dfrac{1}{\sqrt{3}\sqrt{2}}(\operatorname{sen} t-\cos t,\ \operatorname{sen} t+\cos t,$

1.0

$\dfrac{dB}{dt}=\dfrac{1}{\sqrt{3}\sqrt{2}}(\operatorname{sen} t+\cos t,\ -\operatorname{sen} t+\cos t,\ 0)$

0.5

$N\cdot\dfrac{dB}{dt}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{1}{\sqrt{3}\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-\operatorname{sen}-\cos \\ \operatorname{sen}-\cos \\ 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\operatorname{sen}+\cos \\ -\operatorname{sen}+\cos \\ 0\end{pmatrix}=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\cdot(-2)=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

1.0

Ahora $\kappa(t)=\left\|\dfrac{dT}{dt}\right\|\Big/\left\|\dfrac{dr}{dt}\right\|=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\Big/e^{-t}\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}e^{t}$

1.0 $\tau=-N\cdot\dfrac{dB}{dt}\Big/\left\|\dfrac{d\vec{r}}{dt}\right\|=-\dfrac{-1/\sqrt{3}}{\sqrt{3}e^{-t}}=\dfrac{1}{3}e^{t}$

Pauta Problema 2

i) Primero es preciso separar $\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^{1/2}+x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{\cos x}{x^{1/2}+x^2}\,dx + \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^{1/2}+x^2}\,d$

0.3

$\int_0^1 \frac{\cos x}{x^{1/2}+x^2}\,dx$ es de segunda especie y es absolutamente convergente si $\int_0^1 \left|\frac{\cos x}{x^{1/2}+x^2}\right| dx$ converge. Por comparación $\frac{|\cos x|}{x^{1/2}+x^2} \le \frac{1}{x^{1/2}}$ y se

0.6 sabe que $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}}$ converge $(\alpha = \frac{1}{2} < 1)$, entonces $\int \frac{\cos x}{x^{1/2}+x^2}$ conv Absolu

$\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^{1/2}+x^2}\,dx$ es de primera especie y converge absolutamente si $\int_1^\infty \frac{|\cos x|}{x^{1/2}+x^2}\,dx$ converge. Por comparación $\frac{|\cos x|}{x^{1/2}+x^2} \le \frac{1}{x^2}$ y s

sabe que $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ converge $(\alpha = 2 > 1)$, entonces $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^{1/2}+x^2}$ con Abs

0.6 Sigue que $\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^{1/2}+x^2}\,dx$ es Absolutamente Convergente.

ii) $\int_0^1 \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)$ Es integral impropia de segunda especie (en

$$\int_0^1 \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) = \lim_{b\to 1}\int_0^b -\ln(1-x)\,dx = \lim_{b\to 1}\left[-x\ln(1-x)\Big|_0^b - \int_0^b \frac{x}{1-x}\,dx\right]$$

Partes $\begin{cases} u = \ln(1-x) \rightarrow du = -\frac{1}{1-x} \\ dv = dx \rightarrow v = x \end{cases}$

$$= \lim_{b\to 1}\left[-b\ln(1-b) - \int_0^b \frac{x-1+1}{1-x}\,dx\right] = \lim_{b\to 1}\left[-b\ln(1-b) + \int_0^b dx - \int_0^b \frac{dx}{1-x}\right]$$

1.0

$$= \lim_{b\to 1}\left[-b\ln(1-b) + b + \ln(1-b)\right] = \lim_{b\to 1}(1-b)\ln(1-b) + 1$$

0.5

$$= \lim_{b\to 1}\frac{\ln(1-b)}{\frac{1}{1-b}} + 1 \xrightarrow{L'Hop} = \lim_{b\to 1}\cancel{\frac{-\frac{1}{1-b}}{\frac{1}{(1-b)^2}}}^{\to 0} + 1$$

Así $\int_0^1 \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)dx = 1$ Converge

iii) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+a^2}\,dx = \int_0^a \frac{\ln x}{x^2+a^2}\,dx + \int_a^\infty \frac{\ln x}{x^2+a^2}\,dx$

En $\displaystyle\int_0^a \frac{\ln x}{x^2+a^2}\,dx$ se hace el cambio $x=\frac{a^2}{y}$, $dx=-\frac{a^2}{y^2}\,dy$

Así, $\displaystyle\int_0^a \frac{\ln x}{x^2+a^2}\,dx = \int_\infty^a \frac{\ln\left(\frac{a^2}{y}\right)}{\frac{a^4}{y^2}+a^2}\left(-\frac{a^2}{y^2}\right)dy$

1.0 $\displaystyle= \int_a^\infty \frac{2\ln a-\ln y}{\frac{\cancel{a^2}(a^2+y^2)}{\cancel{y^2}}}\left(\frac{\cancel{a^2}}{\cancel{y^2}}\right)dy = \int_a^\infty \frac{2\ln a-\ln y}{a^2+y^2}\,dy$

Entonces $\displaystyle\int_0^a \frac{\ln x}{x^2+a^2}\,dx = 2\ln a\int_a^\infty \frac{dy}{y^2+a^2} - \int_a^\infty \frac{\ln y}{a^2+y^2}\,dy$

Donde reagrupando queda $\displaystyle\int_0^a \frac{\ln x}{x^2+a^2}\,dx + \int_a^\infty \frac{\ln y}{y^2+a^2}\,dy = 2\ln a\int_a^\infty \frac{dy}{y^2+a^2}$

donde la suma del primer miembro es la integral pedida.

Así 1.0 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+a^2}\,dx = 2\ln a\int_a^\infty \frac{dy}{y^2+a^2} = 2\ln a\lim_{t\to\infty}\int_a^t \frac{dt}{y^2+a^2}$

$\displaystyle= 2\ln a\lim_{t\to\infty}\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{a}\right)\Big|_a^t = \frac{2\ln a}{a}\lim_{t\to\infty}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{a}\right)-\overbrace{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arctg}(1)}\right]$

$\displaystyle= \frac{2\ln a}{a}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\cancel{2}\ln a}{a}\,\frac{\pi}{\cancel{4}\,2}$

1.0 $\therefore$ $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+a^2}\,dx = \frac{\pi\ln a}{2a}$

Pauta Problema 3

i) $r(t) = (t, t^2, t^3)$, $\frac{d\vec{r}}{dt} = (1, 2t, 3t^2)$ y $\left\|\frac{d\vec{r}}{dt}\right\| = \sqrt{1+4t^2+9t^4}$

La masa es $M = \int_0^2 \rho(x(t), y(t), z(t))\, ds = \int_0^2 \rho \left\|\frac{d\vec{r}}{dt}\right\| dt$

0.5 Así $M = \int_0^2 (2t+9t^3)\sqrt{1+4t^2+9t^4}\, dt$ con $\rho = 2x+9z = 2t+9t^3$

Con $u = 1+4t^2+9t^4$, $du = (8t+36t^3)dt = 4(2t+9t^3)dt$

$t=0,\ u=1$
$t=2,\ u=161$

$\Rightarrow \frac{1}{4}du = (2t+9t^3)dt$

1.5 Así $M = \frac{1}{4}\int_1^{161} \sqrt{u}\, du = \frac{1}{4}\frac{2}{3} u^{3/2}\Big|_1^{161} = \frac{1}{6}\left[(161)^{3/2} - 1\right]$

ii) $\rho(\theta) = R(1+\cos\theta)$, $R>0$

$\rho'(\theta) = -R\sin\theta$

$L = \int_\alpha^\beta \left\|\frac{d\vec{r}}{d\theta}\right\| d\theta$ con $r = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \wedge \rho = \rho(\theta)$

$\Rightarrow r' = (\rho'\cos\theta - \rho\sin\theta, \rho'\sin\theta + \rho\cos\theta)$

$\Rightarrow \left\|\frac{d\vec{r}}{d\theta}\right\| = \sqrt{(\rho'\cos\theta - \rho\sin\theta)^2 + (\rho'\sin\theta + \rho\cos\theta)^2}$

1.0 Así $\frac{d\vec{r}}{d\theta} = \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}$

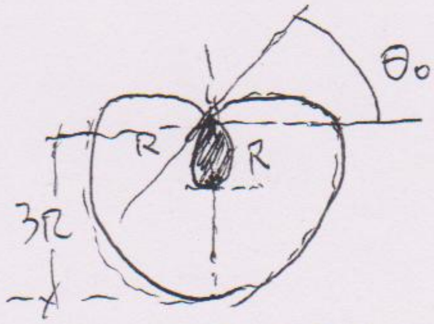
Entonces $L = \underset{\text{2 veces}}{2}\int_0^\pi \sqrt{R^2(1+\cos\theta)^2 + R^2\sin^2\theta}\, d\theta = 2R\int_0^\pi \sqrt{2+2\cos\theta}\, d\theta$

$= 2R\int_0^\pi \sqrt{2(1+\cos\theta)} = 2R\int_0^\pi \sqrt{2\cdot 2\sin^2\frac{\theta}{2}}\, dt = 4R\int_0^\pi \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) dt$

$\therefore L = 4R\left[-2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]_0^\pi = 8R$

1.0

iii)



$\rho(\theta) = R - 2R\,\text{sen}\,\theta$

El area de la región achurada se inicia a partir del angulo θ_0 donde $\rho = 0$, es decir:

$$\rho(\theta_0) = 0 = R - 2R\,\text{sen}\,\theta \Rightarrow$$

$$\text{sen}\,\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

y la mitad del area pedida termina en la vertical para $\theta = \pi/2$ (y $\rho = -R$)

0.5 →

Asi $\text{Area} = \cancel{2}^{\text{veces}} \cancel{\frac{1}{2}} \int_\alpha^\beta \rho^2\, d\theta = \int_{\pi/6}^{\pi/2} (R - 2R\,\text{sen}\,\theta)^2\, d\theta$

$$= R^2 \int_{\pi/6}^{\pi/2} (1 - 2\,\text{sen}\,\theta)^2 = R^2 \int_{\pi/6}^{\pi/2} (1 - 4\,\text{sen}\,\theta + 4\,\text{sen}^2\theta)\, dt$$

$$= R^2 \int_{\pi/6}^{\pi/2} [1 - 4\,\text{sen}\,\theta + 2(1 - \cos 2\theta)]\, dt = R^2 \int_{\pi/6}^{\pi/2} (3 - 4\,\text{sen}\,\theta - 2\cos 2\theta)\, d\theta$$

1.5 →

$$= R^2 \Big[3\theta + 4\cos\theta - \text{sen}\,2\theta\Big]_{\pi/6}^{\pi/2} = \left[3\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) + \left(-4\cos\frac{\pi}{6}\right) + \text{sen}\,\frac{\pi}{3}\right] R^2$$

$$= R^2 \left[\pi - 2\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right] = \left(\pi - \frac{3}{2}\sqrt{3}\right) R^2 = \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{2} \cdot R^2$$