P1

a) Primero calculemos la velocidad del águila

$(\vec{r}(t))' = (1+\sin(t), 2\cos(2t), 3\sin(3t))$

$(\vec{r}(t))' = \vec{V}(t)$ y $V(t) = \|\vec{r}(t)\|$

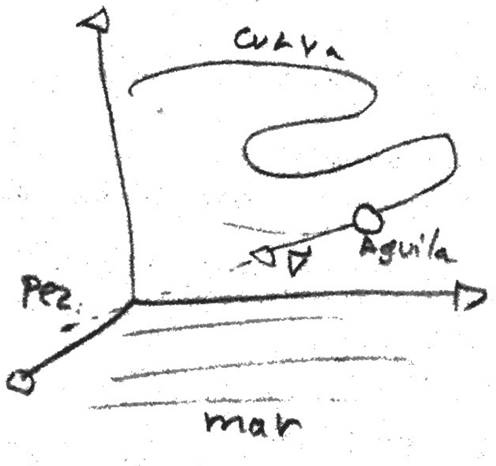
evaluamos en $t = \frac{\pi}{4}$

$\vec{V}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

$V = \|\vec{V}\| = \left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 0^2 + \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2$

$= 1 + \frac{1}{2} + \sqrt{2} + \frac{9}{2} = 6 + \sqrt{2}$

b) Primero usaremos un dibujo para entender el problema.



Ya calculamos $\vec{V}$, si evaluamos en $t = \frac{\pi}{2}$

$\vec{V} = \left(1+\sin\left(\frac{\pi}{2}\right), 2\cos(\pi), 3\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = (2, -2, -3)$

Y esto nos entrega la velocidad del águila en ese momento.

P1

b) Luego debemos determinar la posición del ave

$$\vec{r}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2}, 3, 1\right)$$

A partir de este instante el águila se mueve con velocidad constante

$$\vec{r}_2(t) = \vec{r}\left(\frac{\pi}{2}\right) + t \cdot \vec{V}\left(\frac{\pi}{2}\right) \qquad t > \frac{\pi}{2}$$

como el pez está en el eje XY su coordenada $z=0$.

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi/2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} t = 1/3 \\ a = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3} \\ b = 3 + \frac{1}{3} \cdot -2 = \frac{7}{3} \end{array}$$

a y b representan las coordenadas del pez, con lo que concluimos que

$$= \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3} \\ 7/3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

P2

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} a\cos(t) \\ a\sin(t) \\ f(t) \end{pmatrix} \qquad \vec{r}\,' = \begin{pmatrix} -a\sin(t) \\ a\cos(t) \\ f'(t) \end{pmatrix}$$

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}\,'}{\|\vec{r}\,'\|} = \frac{\begin{pmatrix} -a\sin(t) \\ a\cos(t) \\ f'(t) \end{pmatrix}}{\left(a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + f'^2(t)\right)^{1/2}} = \frac{\begin{pmatrix} -a\sin(t) \\ a\cos(t) \\ f'(t) \end{pmatrix}}{\left(a^2 + f'^2(t)\right)^{1/2}}$$

Luego $\vec{N}(t) = \dfrac{\vec{T}'(t)}{\|\vec{T}'(t)\|}$, queremos que $\vec{N}$ sea perpendicular al eje OZ, un vector es perpendicular a OZ si su coordenada z es 0.

Para derivar $\vec{T}$ usamos la regla del cociente

$$\vec{T}'(t) = \frac{\begin{pmatrix} -a\cos(t) \\ -a\sin(t) \\ f''(t) \end{pmatrix} \cdot \left(a^2 + f'^2(t)\right)^{1/2} - \begin{pmatrix} -a\sin(t) \\ a\cos(t) \\ f'(t) \end{pmatrix} \dfrac{f'(t)f''(t)}{\left(a^2 + f'(t)\right)^{1/2}}}{\left(a^2 + f'^2(t)\right)}$$

Esta expresión es complicada, pero solo nos interesa la coordenada z.

$$\vec{T}_z'(t) = \frac{f''(t)\cdot\left(a^2 + f'^2\right)^{1/2} - \dfrac{f'(t)\, f'(t) f''(t)}{\left(a^2 + f'(t)\right)^{1/2}}}{\left(a^2 + f'^2(t)\right)}$$

Queremos que esta coordenada sea 0, imponemos esta condición.

P2

$$0 = \frac{f''(t)\cdot(a^2+f'^2)^{1/2} - \dfrac{f'^2(t)\cdot f''(t)}{(a^2+f'(t))^{1/2}}}{(a^2+f'^2(t))} \quad / \cdot (a^2+f'^2(t))^{3/2}$$

$$0 = f''(t)(a^2+f'^2) - f'^2(t) f''(t)$$

$$0 = f''(t) a^2 + f''(t) f'(t) - f'^2(t) f''(t)$$

$$0 = f''(t)\, a^2$$

Con esto concluimos que para que la normal sea perpendicular a OZ $f''(t) = 0$, esto significa que: $f(t) = mt+n$.

Utilizamos las condiciones iniciales y obtenemos que

$$\vec{r}(t^*) = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{r}'(t^*) = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a\cos t^* \\ a\sin t^* \\ mt^*+n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \cos t^* = 1 \rightarrow t^* = 0 \\ \sin t^* = 0 \rightarrow t^* = 0 \\ mt^*+n = 0 \rightarrow n = 0 \end{matrix}$$

Luego revisamos que ocurre con $\vec{r}'$ en t^*

$$\vec{r}'(t^*) = \begin{pmatrix} -a\sin t^* \\ a\cos t^* \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \quad \left. t^* = 0 \right\} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow m = a \qquad \boxed{\therefore f(t) = at}$$

P3 El largo de una curva se obtiene según la fórmula:

$$L = \int_0^{2\pi} \|r'(t)\| \quad , \quad \vec{r}'(t) = \begin{pmatrix} t\cos(t) + \sin(t) \\ -t\sin(t) + \cos(t) \\ \sqrt{2}\, t^{1/2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \|\vec{r}'(t)\|^2 &= (t\cos t + \sin t)^2 + (-t\sin t + \cos t)^2 + 2t \\ &= t^2\cos^2 t + \sin^2 t + 2t\sin t\cos t - 2t\cos t\sin t \\ &\quad t^2\sin^2 t + \cos^2 t + 2t \\ &= t^2 + 2t + 1 = (t+1)^2 \end{aligned}$$

$$\|\vec{r}'(t)\| = t+1$$

$$L = \int_0^{2\pi} (t+1)\, dt = \left(\frac{t^2}{2} + t\right)\Big|_0^{2\pi} = 2\pi(\pi+1)$$

Para calcular la masa del alambre usamos

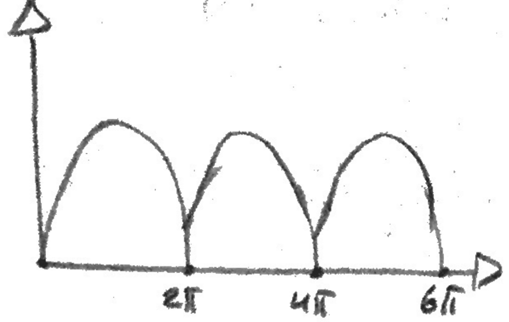
$$M = \int_0^{2\pi} \|\vec{r}'(t)\| \cdot \rho(\vec{r}(t))\, dt \quad , \quad \rho(\vec{r}(t)) = \vec{r}_x^{\,2} + \vec{r}_y^{\,2}$$

$$\rho(\vec{r}(t)) = t^2\cos^2 t + t^2\sin^2 t = t^2$$

$$M = \int_0^{2\pi} (t+1)t^2\, dt = \left(\frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3}\right)\Big|_0^{2\pi} = \boxed{\frac{\pi^4}{4} + \frac{8}{3}\pi^3}$$

P4

a) Para calcular la distancia que recorre la abeja utilizamos la fórmula del largo de curva, pero primero buscamos los límites de integración.



Esta forma es la de una cicloide, $R-\cos(t)$ se hace 0 con $t=2\pi K$.

$$L = \int_0^{2\pi} \|\vec{r}\,'(t)\|\,dt$$

$$\vec{r}\,'(t) = \begin{pmatrix} R - R\cos t \\ R\sin t \end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow \|\vec{r}\,'(t)\|^2 = (R - R\cos t)^2 + R^2\sin^2 t$$
$$= R^2 - 2R^2\cos t + R^2\cos t + R^2\sin^2 t$$
$$= 2R^2 - 2R^2\cos t$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{2R^2(1-\cos t)}\,dt$$

si recordamos

$$\cos^2(\tfrac{t}{2}) - \sin^2(\tfrac{t}{2}) = \cos(t)$$
$$1 - 2\sin^2(\tfrac{t}{2}) = \cos(t)$$
$$2\sin^2(\tfrac{t}{2}) = 1 - \cos(t)$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{4R^2\sin^2(\tfrac{t}{2})} = \int_0^{2\pi} 2R\sin(t/2)\,dt = 4R - \cos(t/2)\Big|_0^{2\pi} = 8R$$

P4

b) La velocidad de la abeja es

$\vec{V} = (R - R\cos t, R\sin t)$ si duplico esa velocidad

$$\underbrace{2\vec{V}}_{\vec{V}^*(t)} = (2R - 2R\cos t, 2R\sin t)$$

si esta es la velocidad veamos cual es nuestra nueva posición

$$\vec{r}^*(t) = (2Rt - 2R\sin t, 2R - 2R\cos t)$$

Que claramente al derivarlo obtengo $\vec{V}^*$

La abeja pasa por las flores cuando su coordenada $y = 0$

$$2R - 2R\cos(t) = 0 \iff \cos t = 1$$

y esto se cumple cuando $t = 2K\pi$, es decir, se mantiene el tiempo entre flores.

c) Después de pasar por n flores la velocidad de la abeja se ha multiplicado por 2^n,

$$\vec{V}^*(t) = 2^n \vec{V}(t) = 2^n R(1 - \cos t, \sin t)$$

$$\|\vec{V}^*(t)\|^2 = 2^{2n} R^2 [(1-\cos t)^2 + \sin^2 t)] = 2^{2n} R^2 (2 - 2\cos t)$$

$$\|\vec{V}^*(t)\|^2 = 2^{2n} R^2 \cdot 4\sin^2(\tfrac{t}{2}) \Rightarrow \|\vec{V}^*(t)\| = 2^{n+1} R\sin(t/2)$$

$$L = \int_0^{2\pi} 2^{n+1} R\sin t/2 = 2^{n+1} R \cdot -2\cos t/2 \Big|_0^{2\pi} = \boxed{2^{n+3} R}$$

P5

a) Usamos la fórmula de longitud de curva.

$$\vec{r}' = \begin{pmatrix} -e^{2t}\sin t + 2e^{2t}\cos t \\ e^{2t}\cos t + 2e^{2t}\sin t \end{pmatrix}$$

$$\|\vec{r}'\|^2 = (-e^{2t}\sin t + 2e^{2t}\cos t)^2 + (e^{2t}\cos t + 2e^{2t}\sin t)^2$$

$$= e^{4t}\sin^2 t + 4e^{4t}\cos^2 t - 4e^{4t}\cancel{\sin t\cos t}$$

$$+ e^{4t}\cos^2 t + 4e^{4t}\sin^2 t + 4e^{4t}\cancel{\cos t\sin t}$$

$$= 5e^{4t}$$

$$\|\vec{r}'\| = \sqrt{5}\, e^{2t}$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{5}e^{2t}\,dt = \sqrt{5}\left(\frac{e^{2t}}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{\sqrt{5}}{2}e^{4\pi} - \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{L}{2} = \int_0^{t_0} \sqrt{5}e^{2t} \Rightarrow \frac{\sqrt{5}}{4}(e^{4\pi}-1) = \int_0^{t_0} \sqrt{5}e^{2t}$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{\sqrt{5}}}{4}(e^{4\pi}-1) = \cancel{\sqrt{5}}\left(\frac{e^{2t}}{2}\right)\Bigg|_0^{t_0} \Rightarrow \frac{e^{4\pi}-1}{4} = \frac{e^{2t_0}}{2} - \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{e^{4\pi}-1}{4} = \frac{e^{2t_0}-1}{2} \;/\cdot 2 \;,\; \frac{e^{4\pi}-1}{2} = e^{2t_0}-1$$

$$\frac{e^{4\pi}+1}{2} = e^{2t_0} \Rightarrow t_0 = \frac{\ln\left(\frac{e^{4\pi}+1}{2}\right)}{2}$$