MA1002-7 Cálculo Diferencial e Integral
Profesores: Emilio Vilches
Auxiliares: Ilana Mergudich - Ignacio Riego
Fecha: Viernes 2 de Diciembre

Auxiliar 11: Curvas

P1. Sea $g : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ una función tal que para $t \geq 0$, $g'(t) > 0$ y $\lim_{t\to\infty} g(t) = M > 0$. Considere la curva $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^3$ parametrizada por $r(t) = (\cos(g(t)), \operatorname{sen}(g(t)), 1)$, $t \geq 0$.

a) Muestre que Γ es regular.

b) Encuentre el largo total de la curva Γ y la parametrización en longitud de arco.

c) Encuentre los vectores $T(t)$, $N(t)$ y $B(t)$.

d) Encuentre $\kappa(t)$ y $\tau(t)$.

P2. Sea $\sigma : [0, L] \to \mathbb{R}^3$ la parametrización en longitud de arco de una curva, con σ de clase $\mathcal{C}^3$. Pruebe que:

$$\tau = \frac{[\sigma' \times \sigma''] \cdot \sigma'''}{||\sigma''||^2}.$$

P3. Un alambre queda determinado por una superficie parabólica de ecuación $x^2 + y^2 + z = \pi$ siguiendo un camino Γ de modo de alcanzar una vuelta en la superficie.

a) Usando coordenadas cilíndricas, deducir la parametrización de Γ, sabiendo que cumple que $z = a\theta$, $a > 0$.

b) Determine el vector tangente de la curva.

c) Encuentre una expresión para la masa de Γ si esta tiene densidad $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z$.