MA1002-7 Cálculo Diferencial e Integral
Profesores: Emilio Vilches
Auxiliares: Ilana Mergudich - Ignacio Riego
Fecha: Viernes 18 de Noviembre

Auxiliar 9: Integrales Impropias

Algunas cosas importantes:

- $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} \begin{cases} \text{converge si } \alpha > 1 \\ \text{diverge si } \alpha \leq 1 \end{cases}$
- $\int_a^{b^-} \frac{1}{(b-x)^\alpha} \begin{cases} \text{converge si } \alpha < 1 \\ \text{diverge si } \alpha \geq 1 \end{cases}$
- **Criterio de comparación:** Sean f, g funciones continuas en $[a, +\infty)$. Si $g(x) \geq f(x)$ a partir de cierto $x_0 \in \mathbb{R}$, entonces si $\int_a^{+\infty} g$ converge, $\int_a^{+\infty} f$ también converge. (Análogo para segunda especie)
- **Criterio del cuociente:** Sean f, g funciones continuas en $[a, +\infty)$, no negativas a partir de cierto $x_0 \in \mathbb{R}$, tales que $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0$. Entonces las integrales impropias $\int_a^{+\infty} f$ y $\int_a^{+\infty} g$ son ambas convergentes o ambas divergentes. (Análogo para segunda especie)
- **Convergencia absoluta:** Sea $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$. $\int_a^{+\infty} f$ es absolutamente convergente si $\int_a^{+\infty} |f|$ converge.
- $\int_a^{+\infty} f$ converge absolutamente $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f$ converge.

P1. Determina si las siguientes integrales impropias son o no convergentes:

a) $\int_0^1 \ln(x)dx$

b) $\int_1^{+\infty} \left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^x dx$

c) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x(x+\sqrt{x})}$

d) $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x^2}dx$

e) $\int_0^1 \frac{\sin(2x)}{x^{3/2}}dx$

f) $\int_0^1 \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)dx$

P2. Sea $f(x) \geq 0, \forall x \in [0, +\infty)$, decreciente en $[0, +\infty)$ clase C^1 y tal que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

a) Demuestre que $\int_0^{+\infty} f'(x)dx$ es absolutamente convergente.

b) Demuestre que $\int_0^{+\infty} f(x)\sin(\alpha x)dx$, $\alpha > 0$ es convergente.

P3. Calcule la integral impropia mixta

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2+a^2}dx$$

donde $a > 0$ fijo, separándola como $\int_0^a + \int_a^{+\infty}$ y usando en cualquiera de ellas la sustitución $x = a^2/y$.

P4. Muestre que las integrales

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^p}dt \text{ y } \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^p}dt,$$

son absolutamente convergentes para todo $p > 1$.

P5. Estudie la convergencia de las siguientes integrales:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t^2)}{t^2}dt \text{ y } \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t^2)}{t^2}dt,$$

Indicación: Para $t \geq 1$ considere el cambio de variables $s = t^2$.