# SOLUCIÓN APUNTE MA1002
## CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL
### SEMANA 9

Autor: Nicolás Igor Tapia Rivas

Use este material con responsabilidad.

**Nota:** El área del manto del sólido de revolución producido por la rotación de una curva $f(x)$ en torno al eje $OX$ entre $a$ y $b$ está dado por:

$$A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx = 2\pi \int_a^b f\sqrt{1+f'^2}$$

En cambio, si se rota en torno al eje $OY$, el área está dado por:

$$A = 2\pi \int_a^b x\sqrt{1+(f'(x))^2}dx = 2\pi \int_a^b x\sqrt{1+f'^2}$$

*Esto es Semana 10 pero por alguna razón misteriosa lo preguntan acá.* Otras fórmulas útiles, que son de la semana 9, son:

$$A_a^b(R) = \int_a^b |f| \qquad V_{OX} = \pi \int_a^b f^2 \qquad V_{OY} = 2\pi \int_a^b xf$$

**E1.**

a)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y = \pm b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$

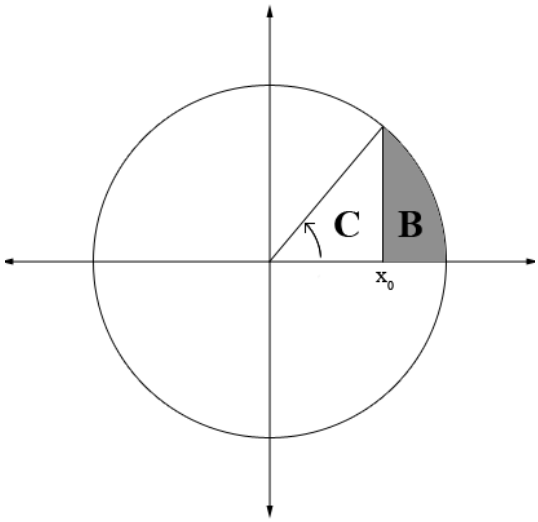
Luego el área de la elipse es la comprendida entre $y_+$ y $y_-$. Notemos que, por la símetría de la elipse, basta calcular el área bajo la curva de $y_+$ entre 0 y $a$ para obtener exactamente un cuarto del área pedida. Es decir,

$$A = 4\int_0^a |y_+|dx = 4\int_0^a b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$

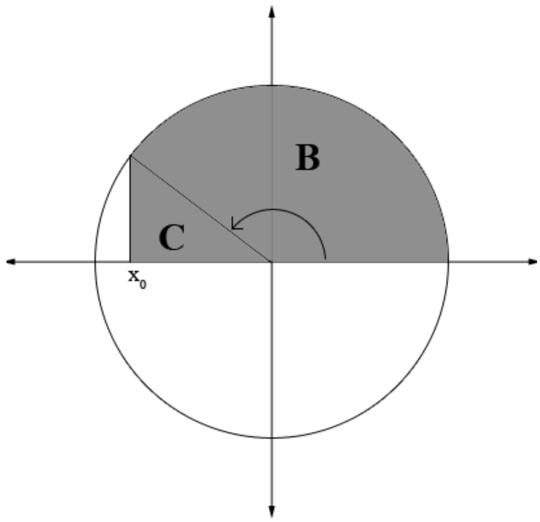
Haciendo $x = a\sin(v) \to dx = a\cos(v)dv;\ v = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{a}\right)$, tenemos:

$$\begin{aligned} A &= 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(v)dv \\ &= 2ab(v+\sin(v)\cos(v))\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = ab\pi \end{aligned}$$

b) Si nos restringimos a los primeros dos cuadrantes, el área del sector circular lo obtenemos integrando el círculo desde $x_0 = R\cos(\alpha)$ hasta $R$ (área B, pintada en gris) y sumándo la integral del rayo del ángulo $\alpha$ desde 0 hasta $x_0$ (área C). Notemos que esta segunda integral se hace negativa en el segundo cuadrante (puesto que en este caso $x_0 < 0$), por lo que es consistente con lo que queremos.




$\alpha$ en el I cuadrante




$\alpha$ en el II cuadrante

Luego, teniendo en cuenta que el rayo del ángulo $\alpha$ es $y = x\tan(\alpha)$,

$$
\begin{aligned}
A_\alpha = & \int_0^{x_0} x\tan(\alpha) + \int_{x_0}^{R} \sqrt{R^2 - x^2} \qquad ; x = R\cos(v) \rightarrow dx = -R\sin(v)dv \\
A_\alpha = & \tan(\alpha)\frac{x^2}{2}\Big|_0^{R\cos(\alpha)} - R^2 \int_\alpha^0 \sin^2(v)dv \\
A_\alpha = & \tan(\alpha)\frac{R^2\cos^2(\alpha)}{2} + \frac{R^2}{2}(v - \sin(v)\cos(v))\Big|_0^\alpha \\
A_\alpha = & \frac{1}{2}R^2\alpha
\end{aligned}
$$

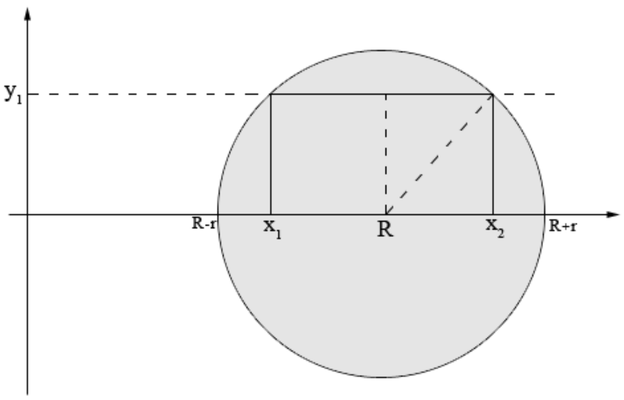
Es fácil extrapolar el resultado al tercer y cuarto cuadrante considerando que podemos usar

$$\alpha = \pi + (\alpha - \pi)$$

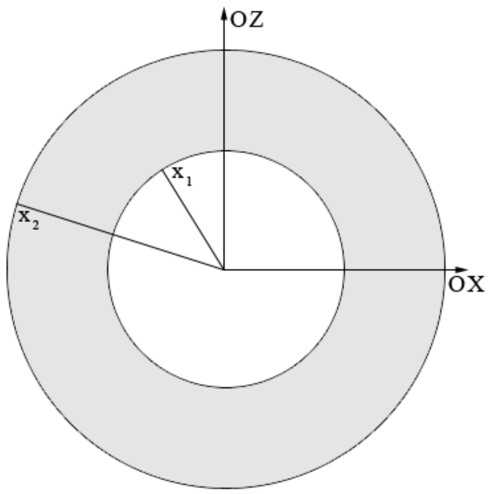
Donde claramente $(\alpha - \pi)$ es un ángulo del primer o segundo cuadrante. Como en estos casos el área del sector circular se puede calcular como la suma del sector circular de esos dos ángulos, tenemos:

$$A_\alpha = A_\pi + A_{\alpha-\pi} = \frac{1}{2}R^2\pi + \frac{1}{2}R^2(\alpha - \pi) = \frac{1}{2}R^2\alpha$$

**E2.**




Corte en el plano $XY$




Corte en $y = y_1$ visto desde arriba

Consideremos el método del disco en torno a $OY$. El toro de revolución en $y_1$ tiene un área transversal $A(y_1) = \pi(x_2^2 - x_1^2)$. En la primera figura se ve que $|R - x_1| = |R - x_2| = \lambda$, donde $\lambda$ se calcula con pitágoras,

$$\lambda^2 + y_1^2 = r^2 \Rightarrow \lambda = \sqrt{r^2 - y_1^2}$$

Luego $x_1 = R - \sqrt{r^2 - y_1^2}$, $x_2 = R + \sqrt{r^2 - y_1^2}$ y

$$A(y_1) = \pi((R - \sqrt{r^2 - y_1^2})^2 - (R + \sqrt{r^2 - y_1^2})^2) = 4\pi R\sqrt{r^2 - y_1^2}$$

Luego el volumen lo encontramos integrando $y_1$ desde $-r$ a $r$. Por la simetría de la figura podemos simplemente integrar desde 0 hasta $r$ y obtendremos la mitad del volumen. Es decir,

$$\begin{aligned} V &= 2\int_0^r 4\pi R\sqrt{r^2 - y^2}dy \qquad ; y = r\sin(v) \to dy = r\cos(v)dv \\ &= 8\pi Rr^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(v)dv = 4\pi Rr^2(v + \sin(v)\cos(v))\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi^2 Rr^2 \end{aligned}$$

**E3.**

$$y_1 = \frac{x^2}{3} \qquad y_2 = 4 - \frac{2x^2}{3}$$

Las funciones se intersectan en $x = \pm 2$, por lo que el área buscada es:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{2} |y_1 - y_2|dx = \int_{-2}^{2} |x^2 - 4|dx = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)dx \\ &= \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{2} = \frac{32}{3} \end{aligned}$$

**E4.** Es directo de ocupar la fórmula mostrada al inicio.

$$A = 2\pi \int_a^b x\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$$

Donde $f'(x) = x$. Luego:

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_0^1 x\sqrt{1+x^2}dx \qquad ; u = 1+x^2 \to du = 2xdx \\ &= \pi \int_1^2 u^{\frac{1}{2}}du = \frac{2\pi}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big|_1^2 \\ &= \frac{2\pi}{3}(2\sqrt{2}-1) \end{aligned}$$

**E5.** Llevemos la rotación en torno a $y = -1$ a una en torno al eje $OX$. Para ello cada función debe trasladarse $+1$ verticalmente. Luego la región estará acotada por:

$$y_1 = 5 - x^2 \qquad\qquad y_2 = 4$$

Usaremos el método del disco para estas dos funciones:

$$V = \pi \int_a^b |y_2^2 - y_1^2|dx$$

Determinar $a$ y $b$ es trivial, dando como resultado $a = -1$ y $b = 1$.

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-1}^1 |(5-x^2)^2 - 4^2|dx \\ &= \pi \int_{-1}^1 |(9-x^2)(1-x^2)|dx \qquad \text{, y como } (9-x^2)(1-x^2) \geq 0 \text{ en } [-1,1], \\ &= \pi \int_{-1}^1 (9-x^2)(1-x^2)dx = \pi \int_{-1}^1 (x^4 - 10x^2 + 9)dx \\ &= \pi \left( \frac{x^5}{5} - \frac{10x^3}{3} + 9x \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{176\pi}{15} \end{aligned}$$

**P1.**

a)
$$(1+x^2)y^2 = x^2(1-x^2)$$

En la ecuación se ve que necesariamente el lado derecho es no negativo, ya que el lado izquierdo lo es. Luego $x \in [-1,1]$. Además, como ambas variables $x$ e $y$ están al cuadrado, se deduce que la curva es simétrica respecto a los dos ejes. Luego, basta con multiplicar por 4 el área del primer cuadrante. En este cuadrante tenemos la función:

$$y_+ = x\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$$

Por lo que el área buscada corresponde a:

$$A = 4\int_0^1 x\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}dx$$

En un intento por hacer que la expresión al interior de la raíz sea un cuadrado perfecto, hagamos

$$v^2 = \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

Y calculando el diferencial

$$(*) \quad 2vdv = \frac{-4x}{(1+x^2)^2}dx$$

Pero

$$\begin{aligned} v^2+1 &= \frac{1-x^2}{1+x^2}+1 \\ v^2+1 &= \frac{2}{1+x^2} \qquad / \; (\;)^2 \\ (v^2+1)^2 &= \frac{4}{(1+x^2)^2} \end{aligned}$$

Por lo que reemplazando en (*) tenemos

$$\begin{aligned} 2vdv &= \frac{-4x}{(1+x^2)^2}dx \\ 2vdv &= -(v^2+1)^2xdx \\ \frac{-2v}{(v^2+1)^2}dv &= xdx \end{aligned}$$

Y como $v(0)=1$ y $v(1)=0$, la integral nos queda:

$$\begin{aligned} A &= 4\int_0^1 x\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}dx \\ &= 4\int_1^0 \frac{-2v}{(v^2+1)^2}vdv \\ &= 4\int_1^0 \left(\frac{1}{v^2+1}\right)' vdv \qquad ; \left[\begin{array}{l} p = v \to dp = dv \\ dq = \left(\frac{1}{v^2+1}\right)' dv \to q = \frac{1}{v^2+1} \end{array}\right] \\ &= 4\left(\frac{v}{1+v^2}\Big|_1^0 - \int_1^0 \frac{dv}{1+v^2}\right) \\ &= 4\left(\frac{v}{1+v^2}\Big|_1^0 - \arctan(v)\Big|_1^0\right) = \pi - 2 \end{aligned}$$

b) Como el conjunto de puntos es simétrico respecto al eje $OX$, basta rotar $y_+$ para obtener el volumen. Luego

$$V = \pi \int_{-1}^{1} (y_+)^2 dx = \pi \int_{-1}^{1} x^2 \frac{1-x^2}{1+x^2} dx = \pi \int_{-1}^{1} \frac{x^2-x^4}{1+x^2} dx$$

Notemos que $x^2 - x^4 = (1+x^2) + (1-x^4) - 2 = (1+x^2) + (1-x^2)(1+x^2) - 2 = (1+x^2)(2-x^2) - 2$, por lo que podemos hacer:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-1}^{1} \frac{(1+x^2)(2-x^2)-2}{1+x^2} dx \\ &= \pi \int_{-1}^{1} \left(2 - x^2 - \frac{2}{1+x^2}\right) dx \\ &= \pi \left(2x - \frac{x^3}{3} - 2\arctan(x)\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{10\pi}{3} - \pi^2 \end{aligned}$$

**P2.**

a) $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 x\sqrt{1-x^2} \qquad , u = 1-x^2 \to du = -2xdx \\ &= -\int_1^0 \frac{u^{\frac{1}{2}}}{2} du = \frac{1}{2}\int_0^1 u^{\frac{1}{2}} du \\ &= \frac{1}{3} u^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

b) Usamos el método del disco

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 (x\sqrt{1-x^2})^2 dx = \pi \int_0^1 x^2(1-x^2) dx = \pi \int_0^1 (x^2 - x^4) dx \\ &= \pi \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1 = \frac{2\pi}{15} \end{aligned}$$

**P3.**

$$\frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm\sqrt{1 - \frac{x^2}{2}} \quad ; x \text{ se mueve en } [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$$

Recordemos que el área del manto por una rotación $OX$ está dada por:

$$A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Para el caso de la elipse, dada su simetría, basta rotar $y_+$.

$$f(x) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{2}} \to f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{4-2x^2}} \to 1 + (f'(x))^2 = \frac{4-x^2}{4-2x^2}$$

Luego tenemos que:

$$A = \pi \int_{-1}^{1} 2\sqrt{1 - \frac{x^2}{2}}\sqrt{\frac{4 - x^2}{4 - 2x^2}} = \pi \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{4 - 2x^2}\sqrt{4 - x^2}}{\sqrt{4 - 2x^2}}$$

Pero como $x \in [-1, 1]$, $\sqrt{4 - 2x^2} \neq 0$ y por lo tanto:

$$\begin{aligned} A &= \pi \int_{-1}^{1} \sqrt{4 - x^2}dx = 2\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}dx \qquad , u = \frac{x}{2} \to du = \frac{dx}{2} \\ &= 4\pi \int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - u^2}du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (*) & \int \sqrt{1 - x^2}dx \qquad , x = \sin(v) \to dx = \cos(v)dv;\ v = \operatorname{arc\,sen}(x) \\ = & \int \cos^2(v)dv = \frac{1}{2}(v + \sin(v)\cos(v)) + c = \frac{1}{2}(\operatorname{arc\,sen}(x) + x\sqrt{1 - x^2}) + c \end{aligned}$$

Luego tenemos que

$$A = 4\pi \int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - u^2}du = 2\pi(\operatorname{arc\,sen}(u) + u\sqrt{1 - u^2})\Big|_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \pi\sqrt{3} + \frac{2\pi^2}{3}$$

**P4.** $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ y $g(x) = \sqrt{3} - \sqrt{1 - x^2}$

a)

$$A = \int_{-1}^{1} |f(x) - g(x)|dx = \int_{-1}^{1} |2\sqrt{1 - x^2} - \sqrt{3}|dx$$

El término encerrado en valor absoluto se anula en $x = \pm\frac{1}{2}$, por lo que:

- $x \in [-1, \frac{-1}{2}]$, $|2\sqrt{1 - x^2} - \sqrt{3}| = \sqrt{3} - 2\sqrt{1 - x^2}$
- $x \in [\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}]$, $|2\sqrt{1 - x^2} - \sqrt{3}| = 2\sqrt{1 - x^2} - \sqrt{3}$
- $x \in [\frac{1}{2}, 1]$, $|2\sqrt{1 - x^2} - \sqrt{3}| = \sqrt{3} - 2\sqrt{1 - x^2}$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{\frac{-1}{2}} (\sqrt{3} - 2\sqrt{1 - x^2})dx + \int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} (2\sqrt{1 - x^2} - \sqrt{3})dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} (\sqrt{3} - 2\sqrt{1 - x^2})dx \\ &= x\sqrt{3}\Big|_{-1}^{\frac{-1}{2}} - 2\int_{-1}^{\frac{-1}{2}} \sqrt{1 - x^2}dx + 2\int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - x^2}dx - x\sqrt{3}\Big|_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} + x\sqrt{3}\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} - 2\int_{\frac{1}{2}}^{1} \sqrt{1 - x^2}dx \\ &= -2\int_{-1}^{\frac{-1}{2}} \sqrt{1 - x^2}dx + 2\int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - x^2}dx - 2\int_{\frac{1}{2}}^{1} \sqrt{1 - x^2}dx \qquad \text{(Calculado en P3)} \\ &= -(\operatorname{arc\,sen}(x) + x\sqrt{1 - x^2})\Big|_{-1}^{\frac{-1}{2}} + (\operatorname{arc\,sen}(x) + x\sqrt{1 - x^2})\Big|_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} - (\operatorname{arc\,sen}(x) + x\sqrt{1 - x^2})\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} \\ &= \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

b) $h(x) = \text{mín}\{f(x), g(x)\}$
Del análisis de signo del valor absoluto de la parte a), podemos obtener que:

- $x \in [-1, \frac{-1}{2}],\ h(x) = f(x)$
- $x \in [\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}],\ h(x) = g(x)$
- $x \in [\frac{1}{2}, 1],\ h(x) = f(x)$

Luego,

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_{-1}^{1} h^2(x)dx = \pi \int_{-1}^{\frac{-1}{2}} f^2(x)dx + \pi \int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} g^2(x)dx + \pi \int_{\frac{1}{2}}^{1} f^2(x)dx \\
&= \pi \int_{-1}^{\frac{-1}{2}} (1-x^2)(x)dx + \pi \int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} (4 - x^2 - 2\sqrt{3}\sqrt{1-x^2})(x)dx + \pi \int_{\frac{1}{2}}^{1} (1-x^2)(x)dx \\
&= \pi \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{\frac{-1}{2}} + \pi \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} + \pi \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} - 2\pi\sqrt{3} \int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}dx \\
&= \frac{13\pi}{3} - 2\pi\sqrt{3} \int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}dx \qquad \text{(Calculado en P3)} \\
&= \frac{13\pi}{3} - \pi\sqrt{3}(\operatorname{arc\,sen}(x) + x\sqrt{1-x^2})\Big|_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{17\pi}{6}(1 - 2\pi\sqrt{3})
\end{aligned}$$

**P5.**

a) El caso $a = 0$ es trivial. La recta que pasa por $P_0$ y $P$, con $a > 0$, es:

$$y_1 = 1 + \frac{f(a) - 1}{a}$$

Luego el área buscada es:

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^a (f(x) - y_1)dx = \int_0^a \left(f(x) + \frac{1 - f(a)}{a} - 1\right)dx \\
&= \frac{1}{a}\left(a\int_0^a f(x)dx + (1 - f(a))\int_0^a xdx - a\int_0^a dx\right) \\
&= \frac{1}{a}\left(a\int_0^a (-6x^2 + 5x + 1)dx + (6a^2 - 5a)\frac{x^2}{2}\Big|_0^a - ax\Big|_0^a\right) \\
&= \frac{1}{a}\left(a\left(-2x^3 + \frac{5x^2}{2} + x\right)\Big|_0^a + (6a^2 - 5a))\frac{a^2}{2} - a^2\right) \\
&= \left(-2a^3 + \frac{5a^2}{2} + a + 3a^3 - \frac{5a^2}{2} - a\right) \\
&= a^3
\end{aligned}$$

b) Las curvas se intersectan en 0 y $m$, por lo que:

$$V_{OX} = \pi \int_0^m (m^2x^2 - x^4)dx \qquad V_{OY} = 2\pi \int_0^m x(mx - x^2)dx$$

Luego ambos volúmenes son iguales si:

$$\begin{aligned}
\int_0^m (m^2x^2 - x^4)dx &= 2\int_0^m x(mx - x^2)dx \\
\left(\frac{1}{3}m^2x^3 - \frac{1}{5}x^5\right)\Big|_0^m &= 2\left(\frac{1}{3}mx^3 - \frac{1}{4}x^4\right)\Big|_0^m \\
\frac{1}{3}m^5 - \frac{1}{5}m^5 &= \frac{2}{3}m^4 - \frac{1}{2}m^4 \\
m^4\left(\frac{2}{15}m - \frac{1}{6}\right) &= 0
\end{aligned}$$

La solución $m > 0$ corresponde a:

$$\frac{2}{15}m - \frac{1}{6} = 0 \Rightarrow m = \frac{15}{12}$$