

P8 a) Como f continua derivable

Podemos aplicar TVM

$$\Rightarrow \exists c \in (a, b) \text{ t.s. } \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

como f' es creciente $\Rightarrow f'(x) \geq 0$

$$\Rightarrow f'(x) = |f'(x)| \leq K \quad \forall x \in (a, b)$$

$$\Rightarrow f'(x) \leq K \quad \forall x \in (a, b)$$

$$\Rightarrow f'(c) \leq K$$

$$\Rightarrow \boxed{f(b) - f(a) \leq K(b - a)}$$

AHORA QUEREMOS VER QUE

$$S(f, P) - \Delta(f, P) \leq K(b - a) |P|$$

UN TRUCCO CLÁSICO es dada

una relación con b y a tomar $\sum \Delta x = |P|$

$$f(b) - f(a) \leq K(b - a) \quad / \quad \sum \Delta x$$

$$\Rightarrow f(b) \sum \Delta x - f(a) \sum \Delta x = K(b - a) |P|$$

$$\Rightarrow \sum f(b) \Delta x - \sum f(a) \Delta x$$

Recordemos que

$$\Delta(f, P) = \sum \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \Delta x$$

$$S(f, P) = \sum \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \Delta x$$

pero como f es creciente

$$f(a) \leq \inf_{\text{en cualquier intervalo}} f(x)$$

$$f(b) \geq \sup_{\text{en cualquier intervalo}} f(x)$$

entonces

$$\sum f(b) \Delta x - \sum f(a) \Delta x \geq \sum \sup f(x) \Delta x - \sum \inf f(x) \Delta x$$

$$\Leftrightarrow K(b-a)|P| \geq S(f, P) - \Delta(f, P)$$

b) condición para que sea integrable:

$$\forall \epsilon > 0 \exists P \in \mathcal{P}_{[a,b]} \text{ tal } S(f, P) - \Delta(f, P) \leq \epsilon$$

$$\text{BASTA tomar } |P| = \frac{\epsilon}{K(b-a)}$$

P tal que