

PAUTA AUX 6

P1

$$\int \frac{x^9}{1+x^3} dx = \int \frac{(x^9+1)-1}{1+x^3} dx = \int \frac{(x^3+1)(x^6-x^3+1)-1}{(x^3+1)} dx$$

ni quita ni pone

$$= \int x^6 - x^3 + 1 - \frac{1}{1+x^3} dx = \frac{x^7}{7} - \frac{x^4}{4} + x - \int \frac{1}{1+x^3} dx$$

I_1

$$I_1 = \int \frac{1}{1+x^3} dx = \int \frac{1}{(1+x)(x^2-x+1)} dx$$

del enunciado: "use fracciones parciales"

$$\frac{1}{(1+x)(x^2-x+1)} = \frac{A}{1+x} + \frac{B}{x^2-x+1}$$

$$\Rightarrow 1 = A(x^2-x+1) + B(1+x)$$

$$\Rightarrow 1 = x^2(A+B) + x(B+C-A) + (A+C)$$

$$\Rightarrow A+B=0 \quad B+C-A=0 \quad A+C=1 \quad (\text{igualamos término a término})$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{3} \quad B = -\frac{1}{3} \quad C = \frac{2}{3}$$

$$I_1 = \int \frac{1}{3(1+x)} dx + \int \frac{-x+2}{3(x^2-x+1)} dx = \frac{\ln(1+x)}{3} + \int \frac{-x+2}{3(x^2-x+1)} dx$$

$$\Rightarrow I = \frac{x^7}{7} - \frac{x^4}{4} + x - \frac{\ln(1+x)}{3} + \frac{1}{3} \int \frac{-2+x}{x^2-x+1} dx$$

I_2

$$I_2 = \int \frac{-2+x}{x^2-x+1} dx = \int \frac{x-2}{\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right) + \frac{3}{4}} dx = \int \frac{x-2}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx$$

completación
de cuadrados

$$I_2 = \int \frac{x-2}{(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} dx$$

cambio de variable: $u = x - \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow du = dx$$

$$x = u + \frac{1}{2}$$

* al tener un grado más abajo que

arriba, en general sirve ^{hacer un} ~~el~~ cambio de variable de "arriba" con lo de "abajo"

$$I_2 = \int \frac{u - \frac{3}{2}}{u^2 + \frac{3}{4}} du = \int \frac{u}{u^2 + \frac{3}{4}} du - \frac{3}{2} \int \frac{1}{u^2 + \frac{3}{4}}$$

¡integral conocida!

$$\left(\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C \right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2u}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2(x - \frac{1}{2})}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$I_2 = -\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + \underbrace{\int \frac{u}{u^2 + \frac{3}{4}} du}_{I_3}$$

cambio de variable

$$t = u^2 + \frac{3}{4}$$

$$dt = 2u du \Rightarrow du = \frac{dt}{2u}$$

$$I_3 = \int \frac{u}{t} \frac{dt}{2u} = \frac{\ln|t|}{2} = \ln\left(\frac{u^2 + \frac{3}{4}}{2}\right) = \ln\left(\frac{(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}{2}\right) = \ln\left(\frac{x^2 - x + 1}{2}\right)$$

$$I_2 = \frac{\ln(x^2 - x + 1)}{2} - \frac{3}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$$

¡NO OLVIDAR!

$$I = \frac{x^7}{7} - \frac{x^4}{4} + x - \frac{\ln(1+x)}{3} + \frac{1}{3} \left[\frac{\ln(x^2 - x + 1)}{2} - \frac{3}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) \right] + C$$

P2] nos dicen que usamos

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\frac{1 - \left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}{1 + \left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}$$

$$= \frac{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \frac{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= (1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)) \cdot \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$= \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \cos(x) //$$

a)

$$\int \frac{1}{1 - \cos(x)} dx = \int \frac{1}{1 - \underbrace{\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}_{\cos(x)}} \cdot \frac{\overset{dx}{2dt}}{1+t^2} = \int \frac{2dt}{\frac{1+t^2}{1+t^2} \cdot \frac{1+t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{2t^2} = -\frac{1}{t} + C$$
$$= -\frac{1}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} + C //$$

$$dt = \frac{1}{2} \sec^2\left(\frac{x}{2}\right) dx = \frac{1}{2} (1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)) dx = \frac{1}{2} (1 + t^2) dx$$

$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \quad \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$\frac{2 \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \frac{2 \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= 2 \tan\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$= 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$= \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \sin(x) //$$

*no es
necesario
demostrarlo en
el control.

b)

$$\int \frac{1}{1 + \sin(x) + \cos(x)} dx = \int \frac{\overbrace{2dt}^{dx}}{(1+t^2)} = \int \frac{\overbrace{2dt}^{dx}}{\cancel{1+t^2} + 2t + \cancel{1-t^2}} = \int \frac{2dt}{1+t^2}$$

$\underbrace{1+t^2}_{\sin(x)} + \underbrace{1-t^2}_{\cos(x)}$

$$= \int \frac{2dt}{2+2t} = \int \frac{dt}{1+t} = \ln(1+t) + C = \ln\left(1 + \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + C //$$

P3 $I_1 = \int \sin(x) dx = -\cos(x) + C_1$

$I_2 = \int \sin^2(x) dx = \int \frac{1 - \cos(2x)}{2} dx = \int \frac{1}{2} dx - \int \frac{\cos(2x)}{2} dx = \frac{1}{2}x - \frac{\sin(2x)}{4} + C_2$

cos(2x) = 1 - 2sin^2(x) //

$n > 2$

$I_n = \int \sin^n(x) dx = \int \underbrace{\sin^{n-1}(x)}_{g(x)} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{f'(x)} dx$

$\Rightarrow g'(x) = (n-1) \sin^{n-2}(x) \cdot \cos(x)$

$f(x) = -\cos(x)$

Integramos por partes

$\int g(x) \cdot f'(x) = \underbrace{\int (f \cdot g)'}_{f \cdot g} - \int g' \cdot f$

$= I_n = -\cos(x) \cdot \sin^{n-1}(x) + \int \cos^2(x) (n-1) \sin^{n-2}(x) dx$

$= -\cos(x) \cdot \sin^{n-1}(x) + (n-1) \int (1 - \sin^2(x)) \cdot \sin^{n-2}(x) dx$

$= -\cos(x) \cdot \sin^{n-1}(x) + (n-1) \int \underbrace{\sin^{n-2}(x)}_{I_{n-2}} - \underbrace{\sin^n(x)}_{I_n} dx$

$I_n = -\cos(x) \sin^{n-1}(x) + (n-1) (I_{n-2} + I_n)$

$\Rightarrow I_n = \frac{1}{n} \left[-\cos(x) \sin^{n-1}(x) + (n-1) I_{n-2} \right]$

P4

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [\ln(n+i) - \ln(n)]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{n+i}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln\left(1 + \frac{i}{n}\right)$$

queremos algo de la forma: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta x f(x_i) = \int_a^b f(x) dx$

donde se debe cumplir que $\Delta x \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ | $x_i = a + i\Delta x (b-a)$

y $x_{i+1} - x_i = \Delta x$

tomemos entonces $\Delta x = \frac{1}{n}$, $x_i = 1 + \frac{i}{n}$ $f(x) = \ln(x)$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln\left(1 + \frac{i}{n}\right) = \int_1^2 \ln(x) dx$$

donde $1 + \frac{i}{n} = a + \frac{i}{n}(b-a) \Rightarrow \begin{matrix} a=1 \\ b=2 \end{matrix}$

$$= \int_1^2 \ln(x) dx = [x \ln(x) - x] \Big|_1^2 = 2 \ln(2) - 2 - \ln(1) + 1 = 2 \ln(2) - 1 //$$

b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\frac{1}{(n+1)^3} + \frac{1}{(n+2)^3} + \dots + \frac{1}{(n+n)^3} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{(n+i)^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{n^3}{(n+i)^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{n}{n+i} \right)^3$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{n+i}{n} \right)^{-3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{i}{n} \right)^{-3}$$

Tomamos $\Delta x = \frac{1}{n}$ $\chi_i = 1 + \frac{i}{n}$ $f(x) = x^{-3}$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{i}{n} \right)^{-3} = \int_a^b x^{-3} dx$$

$$1 + \frac{i}{n} = a + \frac{i}{n}(b-a) \Rightarrow \begin{matrix} a=1 \\ b=2 \end{matrix}$$

$$= \int_1^2 x^{-3} dx = \left. \frac{x^{-2}}{-2} \right|_1^2 = \frac{2^{-2}}{-2} - \frac{1}{-2} = \frac{3}{8} //$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sin\left(\frac{i\pi}{2n}\right) \cdot \frac{i}{4n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \sin\left(\frac{i\pi}{2n}\right) \cdot \frac{i}{2n}$$

Tomamos $\Delta x = \frac{1}{2n}$ $\chi_i = \frac{i}{2n}$ $f(x) = x \sin(\pi x)$

$$= \int_a^b x \sin(\pi x) dx$$

$$\frac{i}{2n} = a + \frac{i}{2n}(b-a) \Rightarrow \begin{matrix} a=0 \\ b=1 \end{matrix}$$

$$= \int_0^1 \overset{\leftarrow f}{x} \cdot \overset{\checkmark g'}{\sin(\pi x)} dx$$

~~$\Rightarrow f = x^2$~~

$$\Rightarrow f' = 1$$

$$g = \frac{-\cos(\pi x)}{\pi}$$

Integramos por partes:

$$\int_0^1 x \sin(\pi x) = \left. \frac{-x \cos(\pi x)}{\pi} \right|_0^1 + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \cos(\pi x)$$

$$= \left(\frac{-x \cos(\pi x)}{\pi} + \frac{\sin(\pi x)}{\pi^2} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{\pi^2} //$$

PS) veamos que $\frac{1}{n} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{i}{n}\right)}$

$$\prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{i}{n}\right) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{n+i}{n}\right) = \frac{1}{n^n} \prod_{i=1}^n (n+i) = \frac{1}{n^n} \frac{(2n)!}{n!}$$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{i}{n}\right)} = \frac{1}{n} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}} //$$

ahora $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{i}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\ln \left(\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{i}{n}\right)} \right)}$

$$= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{i}{n}\right) \right)^{1/n}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \frac{i}{n}\right)}$$

se puede pg'

la exponencial
y el logaritmo
son continuos

Tomamos $\Delta x = \frac{1}{n}$ $x_i = i + \frac{1}{n}$

$$f(x) = \ln(x)$$

$$= e^{\int_1^2 \ln(x) dx}$$

$$i + \frac{1}{n} = a + \frac{i}{n}(b-a) \Rightarrow a=1, b=2$$

$$= e^{\int_1^2 \ln(x) dx}$$

~~$$= e^{\int_1^2 \ln(x) dx}$$~~

$$= e^{(x \ln(x) - x) \Big|_1^2} = e^{2 \ln(2) - 1} = \frac{e^{2 \ln(2)}}{e} = \frac{4}{e} //$$

16] $G(x) = \int_x^{x+1} (x-t) f(t) dt = x \int_x^{x+1} f(t) dt - \int_x^{x+1} t f(t) dt$

$$G'(x) = \int_x^{x+1} f(t) dt + x \left[\underset{\substack{\uparrow \\ \text{T.F.C}}}{f(x+1)} - f(x) \right] - \left[\underset{\substack{\uparrow \\ \text{T.F.C}}}{(x+1) f(x+1)} - x f(x) \right]$$

regla de la
cadena

$$= \int_x^{x+1} f(t) dt + \cancel{x f(x+1)} - \cancel{x f(x)} - (\cancel{x}) \cancel{f(x+1)} - f(x+1) + \cancel{x f(x)}$$

$$= \int_x^{x+1} f(t) dt - f(x+1)$$

$$G''(x) = \underbrace{f(x+1) - f(x)}_{\text{T.F.C}} - f'(x+1)$$

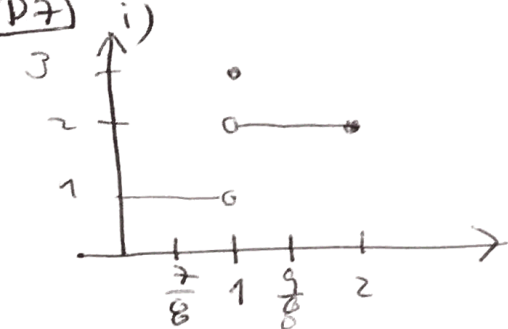
Sabemos que $f'' \geq 0 \Rightarrow f'$ creciente

usamos T.V.M y vemos que

$$\frac{f(x+1) - f(x)}{x+1 - x} = f(x+1) - f(x) = f'(\xi) \quad \xi \in (x, x+1)$$

$$(\xi < x+1)$$

$$\Rightarrow G''(x) = f'(\xi) - f'(x+1) \leq 0 //$$



Nos piden para $P = \{0, \frac{7}{8}, 1, \frac{9}{8}, 2\}$

$$s(f, P) \wedge S(f, P)$$

por lo tanto tenemos que buscar íntimos y supremos en los intervalos

$[a, b] \rightarrow$
 / \
 int sup

$[0, \frac{7}{8}]$, $[\frac{7}{8}, 1]$, $[1, \frac{9}{8}]$, $[\frac{9}{8}, 2]$
 / \ / \ / \ / \
 1 1 1 3 2 3 2 2

MUCHO OJO CON LOS MARCADOS QUE UNO PODRÍA CONFUNDIRSE. CUANDO BUSCAMOS EL ÍNTIMO BUSCAMOS EL VALOR MAS CHICO AL CUAL PODEMOS ACERCARNOS MOVIÉNDONOS POR EL INTERVALO.

POR ESO ES QUE EL ÍNFINIMO DE $[1, \frac{9}{8}]$ ES 2 $\wedge$ NO 1

PORQUE NO HAY FORMA DE ACERCARSE AL 1 EN ESE INTERVALO EN CAMBIO ES CLARO QUE EN $[\frac{7}{8}, 1]$ SÍ PUEDO ACERCARME AL 1.

¿Y PORQUE EL SUPREMO ES 3 EN $[1, \frac{9}{8}]$? PORQUE EL 1 ES PARTE DEL INTERVALO, A LO QUE ME REFIERO ES QUE PARA "ACERCARSE" A UN VALOR SIRVE TANTO UNA LÍNEA COMO UN PUNTO

ASÍ AHORA ES FÁCIL VER QUE

$$\Delta(f, P) = \sum_{i=1}^4 m_i \Delta x_i = 1 \cdot \left(\frac{7}{8} - 0\right) + 1 \left(1 - \frac{7}{8}\right) + 2 \left(\frac{9}{8} - 1\right) + 2 \left(2 - \frac{9}{8}\right)$$
$$= 3 //$$

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^4 M_i \Delta x_i = 1 \left(\frac{7}{8} - 0\right) + 3 \left(1 - \frac{7}{8}\right) + 3 \left(\frac{9}{8} - 1\right) + 2 \left(2 - \frac{9}{8}\right)$$
$$= 27/8 //$$

ii) De la parte anterior vemos que la partición es de la forma

$$P = \left\{ 0, 1 - \frac{1}{8}, 1, 1 + \frac{1}{8}, 2 \right\}$$

ASÍ SE NOS OCURRE USAR

$\tilde{P} = \{ 0, 1 - \delta, 1, 1 + \delta, 2 \}$ OJO δ NO ES CONOCIDO ES PRECISAMENTE LO QUE DEBEMOS CALCULAR PARA QUE SE CUMPLA LO PEDIDO.

$$\Delta(f, \tilde{P}) = 1(1 - \delta - 0) + 1(1 - (1 - \delta)) + 2(1 + \delta - 1) + 2(2 - (1 + \delta)) = 3$$

$$S(f, \tilde{P}) = 1(1 - \delta - 0) + 3(1 - (1 - \delta)) + 3(1 + \delta - 1) + 2(2 - (1 + \delta))$$
$$= 3\delta + 3$$

QUEREMOS QUE $\frac{S - \Delta}{3\delta} = \varepsilon$

LUEGO BASTA TOMAR $\delta = \varepsilon/3$

$$\Rightarrow \tilde{P} = \left\{ 0, 1 - \frac{\varepsilon}{3}, 1, 1 + \frac{\varepsilon}{3}, 2 \right\}$$