

MA1002-7 Cálculo Diferencial e Integral

Profesores: Emilio Vilches

Auxiliares: Ilana Mergudich - Ignacio Riego

Fecha: Viernes 27 de Octubre



Auxiliar 6: Integral de Riemann y TFC

P1. Usando el método de fracciones parciales calcule: $\int \frac{x^9}{1+x^3} dx$.

P2. Usando el cambio de variables $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ calcule:

a) $\int \frac{1}{1 - \cos(x)} dx$

b) $\int \frac{1}{1 + \sin(x) + \cos(x)} dx$

P3. Sea $I_n = \int \sin^n(x) dx$. Calcule I_1 e I_2 y luego defina la fórmula de recurrencia para I_n con $n > 2$.

P4. Calcule los siguientes límites:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [\ln(n+i) - \ln(n)]$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\frac{1}{(n+1)^3} + \frac{1}{(n+2)^3} + \dots + \frac{1}{(n+n)^3} \right)$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sin\left(\frac{i\pi}{2n}\right) \frac{i}{4n^2}$

P5. Demuestre que, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{n} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{i}{n}\right)}$$

Luego calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}$.

P6. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2(\mathbb{R})$ con $f''(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Demuestre que si $G(x) = \int_x^{x+1} (x-t)f(t)dt$, entonces $G''(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

P7. Sea $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, 1) \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ 2 & \text{si } x \in (1, 2] \end{cases}$$

a) Para la partición $P = \{0, 7/8, 1, 9/8, 2\}$ calcule la suma inferior $s(f, P)$ y la suma superior $S(f, P)$.

b) Encuentre una partición $P_\epsilon \in \mathcal{P}_{[0,2]}$ tal que $\forall \epsilon, 0 < \epsilon < 1$ se cumpla $S(f, P) - s(f, P) < \epsilon$.

P8. Sea f una función derivable y creciente en $[a, b]$ tal que $|f'(x)| \leq K \forall x \in [a, b]$.

a) Use TVM para deducir que: $\forall P \in \mathcal{P}_{[a,b]}$

$$S(f, P) - s(f, P) \leq K|P|(b-a).$$

b) Demuestre que f es integrable en $[a, b]$.