P1

P. d. Q. $S(f,P) - s(f,P) \leq K\,|P|\,(b-a)$

recordar que: $|P| = \min_{i \in \mathbb{N}} x_{i+1} - x_i$ con x_{i+1} y $x_i \in P$

Ahora, para comenzar vamos a analizar una partición de 2 elementos:

$P = \{x_i, x_{i+1}\}$ con $a \leq x_i < x_{i+1} \leq b$

Como f es creciente tenemos:

$f(x_i) < f(x_{i+1})$

además $\sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) = f(x_{i+1})$ ya que f es creciente. Lo mismo se tiene para el ínfimo y $f(x_i)$

$\Rightarrow S(f, \{x_i, x_{i+1}\}) = (x_{i+1} - x_i) \cdot f(x_{i+1})$

$s(f, \{x_i, x_{i+1}\}) = (x_{i+1} - x_i)\, f(x_i)$

Si restamos las 2 igualdades

$S(f, \{x_i, x_{i+1}\}) - s(f, \{x_i, x_{i+1}\}) =$

$= (x_{i+1} - x_i) \cdot (f(x_{i+1}) - f(x_i))$

Ahora podemos usar T.V.I. sobre f.

$\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = f(\xi)$, notamos que $f(\xi) \leq K$

$\Rightarrow \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \leq K$

$\Rightarrow f(x_{i+1}) - f(x_i) \leq K\,(x_{i+1} - x_i)$ además $x_{i+1} - x_i \leq |P|$

$\Rightarrow f(x_{i+1}) - f(x_i) \leq |P|\,K\,(x_{i+1} - x_i)$

P1) Si multiplicamos por $(x_{i+1} - x)$

$$(x_{i+1} - x_i)(f(x_{i+1}) - f(x_i)) \leq |P| K (x_{i+1} - x_i)$$

Ahora esto se tiene $\forall i$ con $x_i, x_{i+1} \in P$
Por lo que podemos sumar todos
los segmentos de la partición para llegar
a lo que queremos:

$$\sum_{i=0}^{n} (x_{i+1} - x_i)(f(x_{i+1}) - f(x_i)) \leq \sum_{i=0}^{n} |P| K (x_{i+1} - x_i)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (x_{i+1} - x_i) f(x_{i+1}) - \sum_{i=0}^{n} (x_{i+1} - x_i) f(x_i)$$

Si llamamos $x_{i+1} - x_i = \Delta x$ y recordamos que
$f(x_{i+1}) = \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x)$ y $f(x_i) = \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x)$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{i=0}^{n} \Delta x \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x)}_{S(f,P)} - \underbrace{\sum_{i=0}^{n} \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x)}_{s(f,P)}$$ por definición

$$S(f,P) - s(f,P) \leq \sum_{i=0}^{n} |P| K \Delta x = |P| K \sum_{i=0}^{n} \Delta x$$

claramente $\sum_{i=0}^{n} \Delta x = b - a$

$$\Rightarrow S(f,P) - s(f,P) \leq |P| K (b-a)$$

Que es lo que queríamos demostrar

P1

b) f es integrable $\Longleftrightarrow \lim_{|P| \to 0} S(f,P) - s(f,P) = 0$

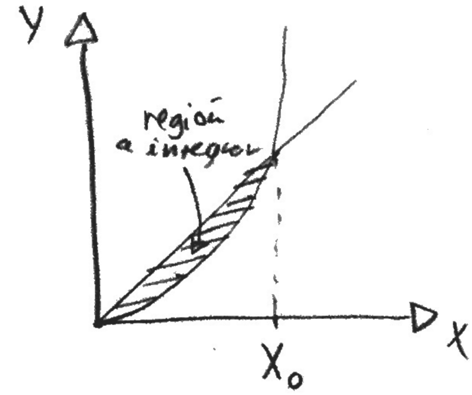
¡Por sandwich!

$$0 \leq S(f,P) - s(f,P) \leq \underbrace{K|P|(b-a)}_{\text{tiende a } 0}$$

$$\Rightarrow \lim_{|P| \to 0} S(f,P) - s(f,P) = 0$$

Vale la pena mencionar que cada función se puede dividir en tramos crecientes y decrecientes, por lo que basta que la derivada sea acotada para que esto se cumpla por tramos.

P2



Primero debemos revisar los límites sobre los que vamos a integrar.

Las curvas se encuentran en:

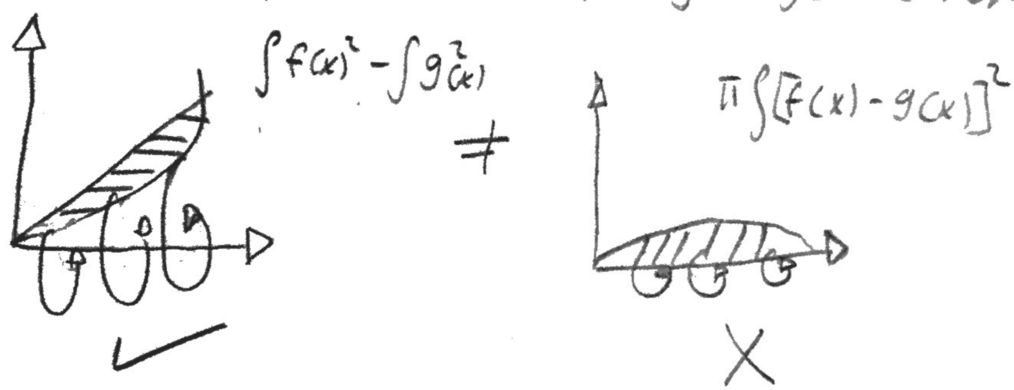
$$Y = mx = x^2 \quad \text{si } x \neq 0$$

$$m = x \quad \Rightarrow \text{se encuentran en } (0,0) \text{ y } (m, m^2)$$

En efecto, debemos integrar entre 0 y m

Respecto a OX

¡Recordar que primero se rota y luego se resta!



$$\text{Entonces: } Vol_{ox} = \pi\int_0^m (mx)^2 - \pi\int_0^m (x^2)^2$$

$$= \pi \frac{m^2x^3}{3}\Big|_0^m - \pi\frac{x^5}{5}\Big|_0^m = \pi\frac{m^5}{3} - \pi\frac{m^5}{5} = \frac{2\pi}{15}m^5$$

P2

Respecto a OY

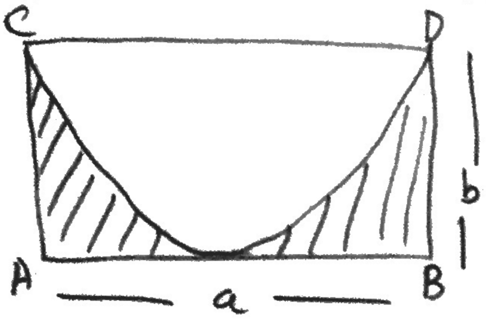
$$2\pi\int_0^m x(mx) - 2\pi\int_0^m x(x^2) = 2\pi m \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^m - 2\pi \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^m$$

$$= \frac{2\pi m^4}{3} - \frac{\pi m^4}{2} = \frac{\pi m^4}{6} = Vol_{OY}$$

Imponemos $Vol_{OY} = Vol_{OX}$

$$\frac{\pi m^4}{6} = \frac{2\pi}{15} m^5 \Rightarrow m = \frac{5}{4} \quad //$$

P3

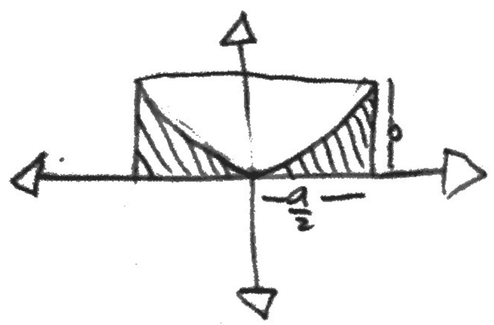


Debemos calcular el área del rectángulo y luego el área debajo de la parábola.

$$A_{\square} = a \cdot b$$

$A_{\text{parábola}} = \int ?$, Primero hay que parametrizar la parábola.

Afortunadamente conocemos 3 puntos.



Colocamos así el sistema de referencia.

Pasa por $(0,0)$, $(\frac{a}{2}, b)$, $(-\frac{a}{2}, b)$

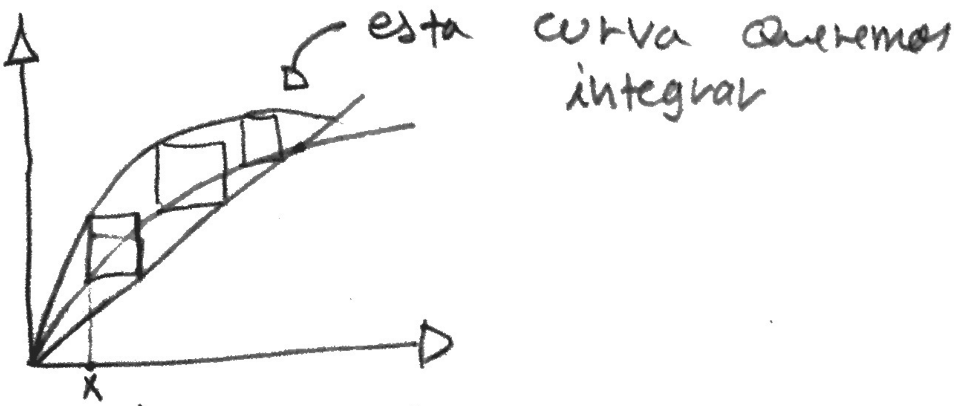
$Y = mx^2$ y $b = m(\frac{a}{2})^2 = \frac{ma^2}{4} \Rightarrow m = \frac{4b}{a^2}$

Ahora, la parábola es par por lo que integramos de 0 a $\frac{a}{2}$ y multiplicamos por 2.

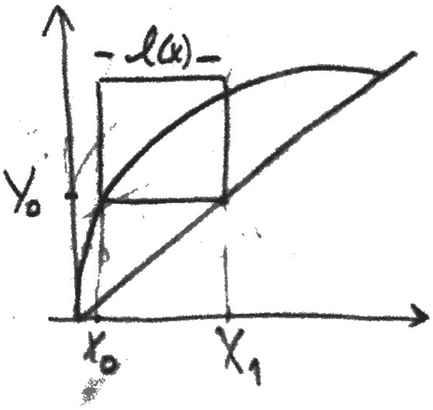
$$2\int_0^{a/2} \frac{4b}{a^2} x^2 = \frac{8b}{a^2} \int_0^{a/2} x^2 = \frac{8b}{a^2} \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^{a/2} = \frac{8ba^3}{8 \cdot 3a^2} = \frac{ba}{3}$$

$$\Rightarrow \acute{A}_{par} = \frac{A_{\square}}{3} \quad //$$

P4



Vamos a definir $l(X)$ como el lado del cuadrado que se coloca en X.
Para determinar $l(x)$ vamos a usar el siguiente dibujo:



Vemos que $l(x) = X_1 - X_0$ además la recta en $X_0 = Y_0$ y la parábola en $X_0 = Y_0$

$\therefore$ si $X_0 = X$, $Y_0 = 2\sqrt{ax}$, como la recta en X_1 es Y_0 $Y_0 = X_1$ por def. de la recta.

Entonces $l(x) = X_1 - X_0 = Y_0 - X = 2\sqrt{ax} - X$

Nosotros queremos concentrarnos en las esquinas superiores de cada cuadrado, y sus posiciones son:

$P(X) + l(x)$ con $P(X) = 2\sqrt{ax}$, un punto de la parábola.

P4 Conocemos $l(x)$ y $P(x)$

$$\Rightarrow \quad P(x) + l(x) = 2\sqrt{ax} + 2\sqrt{ax} - x = 4\sqrt{ax} - x$$

Queremos integrar entre 0 y 4a

Ya que 4a cumple:

$$Y^2 = 4ax \text{ y } Y = X \Rightarrow x^2 = 4ax \begin{cases} x = 0 \\ 4a = x \end{cases}$$

$\Rightarrow$ integramos entre $x=0$ y $x=4a$

Pero no debemos considerar por debajo de la recta $Y=X$, por lo que integramos

$$\int_0^{4a} P(x) + l(x) - \int_0^{4a} x = \int_0^{4a} 4\sqrt{ax} - x \, dx - \int_0^{4a} x \, dx$$

$$= \int_0^{4a} 4\sqrt{ax} - 2x \, dx = 4\sqrt{a}\, \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{4a} - x^2 \Big|_0^{4a}$$

$$= \frac{8\sqrt{a}}{3}(4a)^{\frac{3}{2}} - (4a)^2 = \frac{64a^2}{3} - 16a^2 = \frac{64-48}{3}a^2$$

¡ $\frac{16}{3}a^2$ = Area a integrar !