



## Control 2

**P1.** a) Calcule las siguientes primitivas

a.1) (2,0 ptos.)  $\int x^3 \sqrt{5 - 2x^2} dx$

a.2) (2,0 ptos.)  $\int \frac{1}{2 - \sin^2(x)} dx$  **Indicación:** use  $u = \tan(x)$ .

b) (2,0 ptos.) Obtenga una relación de recurrencia para

$$I_n = \int \sqrt{x+b}(x+a)^n dx, \quad a, b, x > 0$$

y calcule  $I_0$ .

**Indicación:** Puede ser útil usar la identidad  $x+b = (x+a) + (b-a)$ .

**P2.** a) (3,0 ptos.) Demuestre que  $\exists \xi \in (1, e)$  tal que

$$\int_1^e (\ln(x))^{n+1} dx = (\ln(\xi))^n, \quad n \geq 1 \quad \text{y concluya que} \quad \int_1^e (\ln(x))^{n+1} dx \leq \ln(\xi).$$

Debe justificar toda hipótesis que utilice.

b) Sea  $a_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [\ln(n+i) - \ln(n)]$ .

b.1) (1,0 pto.) Identifique a  $a_n$  como una suma de Riemann, determinando la función y la partición involucradas.

b.2) (2,0 ptos.) Calcule  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  usando la integral apropiada.

**P3.** a) Se definen, para  $x > 0$ , las funciones

$$G(x) = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{1+t^2} \quad \text{y} \quad H(x) = \int_x^1 \frac{dt}{1+t^2}.$$

a.1) (1,0 pto.) Demuestre que  $G'(x) = H'(x)$ .

a.2) (1,0 pto.) Concluya, justificando, que  $G(x) = H(x)$ ,  $\forall x > 0$ .

a.3) (1,0 pto.) Calcule las integrales definidas para  $G(x)$  y  $H(x)$  y deduzca la identidad

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}, \quad \forall x > 0.$$

b) b.1) (1,5 ptos.) Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_1^x (x-1) \sin(t^2) dt}{\int_{x^2}^{x^3} \sin(t^2 - 1) dt}.$$

b.2) (1,5 ptos.) Encuentre una función  $f$  y un real  $a > 0$  tales que

$$6 + \int_a^x \frac{f(t)}{t^2} dt = 2\sqrt{x}, \quad \forall x > 0.$$

10 de octubre de 2009  
Sin consultas  
Tiempo: 3:00 hrs.

# Calculo Diferencial e Integral - Control 2

## Pauta Problema 1

a) a1)  $\int x^3 \sqrt{5-2x^2} dx$  conviene el reemplazo  $t^2 = 5-2x^2, x^2 = \frac{5-t^2}{2}$   
 asi  $2t dt = -4x dx$

(1.0)  $\int x^3 \sqrt{5-2x^2} dx = \int x^2 \sqrt{5-2x^2} x dx = \int \frac{5-t^2}{2} \sqrt{t^2} \left(-\frac{1}{2} t dt\right)$   
 $= -\frac{1}{4} \int (5-t^2) t^2 dt = -\frac{1}{4} \int (5t^2 - t^4) dt = -\frac{1}{4} \left[ \frac{5}{3} t^3 - \frac{1}{5} t^5 \right] + C$

(1.0) y en la variable original  $\int x^3 \sqrt{5-2x^2} dx = -\frac{1}{4} \left[ \frac{5}{3} (5-2x^2)^{3/2} - \frac{1}{5} (5-2x^2)^{5/2} \right] + C$   
 Observación: También puede resolverse con reemplazo trigonométrico  
 $x = \sqrt{\frac{5}{2}} \sin t$ .

a.2)  $\int \frac{dx}{2 - \sin^2 x}$  Según indicación  $u = \tan x$   
 entonces  $du = \sec^2 x dx = (1 + \tan^2 x) dx \Rightarrow dx = \frac{du}{1+u^2} = \frac{du}{1+u^2}$   
 y  $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{1}{\sec^2 x} = 1 - \frac{1}{1+u^2} = 1 - \frac{1}{1+u^2} = \frac{u^2}{1+u^2}$

(1.0) Asi  $\int \frac{dx}{2 - \sin^2 x} = \int \frac{\frac{du}{1+u^2}}{2 - \frac{u^2}{1+u^2}} = \int \frac{du}{2 + 2u^2 - u^2} = \int \frac{du}{2 + u^2}$

(1.0) y  $\int \frac{du}{2 + u^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{u}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left( \frac{\tan x}{\sqrt{2}} \right) + C$

b)  $I_m = \int \sqrt{x+b} (x+a)^m dx$

Por partes  $u = (x+a)^m \rightarrow du = m(x+a)^{m-1} dx$   
 $dV = (x+b)^{1/2} dx \rightarrow V = \frac{2}{3} (x+b)^{3/2}$

Asi  $I_m = \frac{2}{3} (x+a)^m (x+b)^{3/2} - \frac{2}{3} m \int (x+a)^{m-1} (x+b)^{3/2} dx \rightarrow (0.5)$

$\Rightarrow I_m = \frac{2}{3} (x+a)^m (x+b)^{3/2} - \frac{2m}{3} \int (x+a)^{m-1} \sqrt{x+b} (x+b) dx$   
 (x+a+b-a)  $\rightarrow$  indicación

$\Rightarrow I_m = \frac{2}{3} (x+a)^m (x+b)^{3/2} - \frac{2m}{3} \left[ \underbrace{\int (x+a)^m \sqrt{x+b} dx}_{I_m} + (b-a) \underbrace{\int (x+a)^{m-1} \sqrt{x+b} dx}_{I_{m-1}} \right] \rightarrow (1.0)$

agrupando  $I_m = \frac{2}{2m+3} (x+a)^m (x+b)^{3/2} - \frac{2m}{2m+3} (b-a) I_{m-1} \quad \forall m \geq 1$

Además  $I_0 = \int (x+b)^{1/2} dx = \frac{2}{3} (x+b)^{3/2} + C$

$\rightarrow (0.5)$

## Pauta Problema 2

a) La integral se puede escribir como  $\int_1^e (\ln x)^{m+1} dx = \int_1^e (\ln x)^m \ln x dx$

donde  $(\ln x)^m$  es continua en  $(1, e)$  y  $\ln x$  es integrable en  $(1, e)$ , pues también es continua, y no cambia de signo ( $> 0$ ) en  $(1, e)$ .

Con esto se satisfacen las hipótesis del TVMG para integrales

y por lo tanto  $\exists \xi \in (1, e)$  tal que  $\int_1^e (\ln x)^m \ln x dx = (\ln \xi)^m \int_1^e \ln x dx$

Además  $\int_1^e \ln x dx = x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e 1 dx = x \ln x \Big|_1^e - x \Big|_1^e = e - (e-1) = 1$

Partes  $\begin{cases} u = \ln x \rightarrow du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx \rightarrow v = x \end{cases}$

Así  $\int_1^e (\ln x)^{m+1} dx = (\ln \xi)^m, \xi \in (1, e), m \geq 1$

También, como  $\xi \in (1, e) \rightarrow \ln \xi \in (0, 1) \Rightarrow (\ln \xi)^m \leq \ln \xi, m \geq 1$

se concluye que  $\int_1^e (\ln x)^{m+1} \leq \ln \xi$  algún  $\xi \in (1, e)$ .

b) b.1)  $a_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [\ln(n+i) - \ln(n)] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{n+i}{n}\right) = \sum_{i=1}^n \ln\left(1 + \frac{i}{n}\right) \cdot \frac{1}{n}$

Entonces la partición de  $[a, b]$  será  $\frac{b-a}{n} = \frac{1}{n} \Rightarrow b-a=1$

Además  $x_i = a + i \frac{b-a}{n} = 1 + \frac{i}{n} \Rightarrow a=1$

Así,  $a=1, b=2$  y  $f(x) = \ln x$

OBS: También puede ser  $a=0, b=1$  y  $f(x) = \ln(1+x)$  (10)

b.2) Según lo anterior (b.1) la suma de Riemann se calcula como

$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\ln(n+i) - \ln(n)) \right\} = \int_1^2 \ln x dx$  (0.5)

Por partes, ya se calculó en el punto a)

$\int_1^2 \ln x dx = x \ln x \Big|_1^2 - x \Big|_1^2 = 2 \ln 2 - (2-1) = 2 \ln 2 - 1$

Entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = 2 \ln 2 - 1$  (1.5)

# Punto Problema 3

a)  $G(x) = \int_1^x \frac{dt}{1+t^2}$ ,  $H(x) = \int_x^1 \frac{dt}{1+t^2}$   $x > 0$

a.1)  $G'(x) = \frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{x^2}{x^2+1} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{1+x^2} \rightarrow \textcircled{0.5}$

$H'(x) = \left(\int_x^1 \frac{dt}{1+t^2}\right)' = 0 - \frac{1}{1+x^2} \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Entonces  $G'(x) = H'(x) \rightarrow \textcircled{0.5}$

a.2) Como  $G'(x) = H'(x) \Rightarrow G(x) = H(x) + C \rightarrow \text{constante.} \rightarrow \textcircled{0.5}$

Para  $x=1$ ,  $G(1) = H(1) + C$  pero  $G(1) = \int_1^1 \frac{dt}{1+t^2} = 0$

y  $H(1) = \int_1^1 \frac{dt}{1+t^2} = 0$

Entonces,  $0 = 0 + C \Rightarrow C = 0$

Segue que  $G(x) = H(x) \quad \forall x > 0 \rightarrow \textcircled{0.5}$

a.3) Los integrales son  $G(x) = \int_1^x \frac{dt}{1+t^2} = \arctan t \Big|_1^x = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{\pi}{4}$

$H(x) = \int_x^1 \frac{dt}{1+t^2} = \arctan t \Big|_x^1 = \frac{\pi}{4} - \arctan(x)$   $\rightarrow \textcircled{0.6}$

Como  $G(x) = H(x), \forall x > 0 \Rightarrow \arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - \arctan(x)$

$\Rightarrow \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \arctan(x) = \frac{\pi}{2} \rightarrow \textcircled{0.4}$

b) b.1)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_1^x (x-1) \sin(t^2) dt}{\int_x^{x^3} \sin(t^2-1) dt} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \int_1^x \sin(t^2) dt}{\int_x^{x^3} \sin(t^2-1) dt} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_1^x \sin(t^2) dt + (x-1) \sin(x^2)}{3x^2 \sin(x^2-1) - 2x \sin(x^2-1)}$

$\stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 \sin(x^2) + (x-1) 2x \cos(x^2)}{6x \sin(x^2-1) + 3x^2 6x^5 \cos(x^2-1) - 2 \sin(x^2-1) - 2x 4x^3 \cos(x^2-1)} = \frac{2 \sin(1)}{18-8} = \frac{1}{5} \sin(1)$

b.2)  $6 + \int_a^x \frac{f(t)}{t^2} dt = 2\sqrt{x}$

Para  $x=a > 0$ ,  $6 + \int_a^a \frac{f(t)}{t^2} dt = 2\sqrt{a} \Rightarrow \sqrt{a} = 3 \Rightarrow a = 9 \rightarrow \textcircled{0.5}$

Derivando, según TFC.  $0 + \frac{f(x)}{x^2} = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f(x) = x^{3/2} \rightarrow \textcircled{1.0}$

OBS: También puede determinarse  $f(x)$  primero, reemplazar en  $\int_a^x \frac{f(t)}{t^2} dt$  y luego, calcular la integral y determinar el valor de  $a$ .