



Control 2

P1. Considere la función f definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } x \in (1, 2] \end{cases}$$

a) (1,5 ptos.) Para la partición de $[0, 2]$ dada por $P = \{0, 1, 2\}$, demuestre que $s(f, P) = 1$ y que $S(f, P) = 4$.

b) (3,0 ptos.) Para $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y $\delta \in (0, 1)$ considere la partición dada por

$$P = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n}, 1 + \delta, 2\}.$$

Calcule $s(f, P)$, $S(f, P)$ y demuestre que $S(f, P) - s(f, P) = \frac{2}{n} + \delta$.

c) (1,5 ptos.) Usando la parte b) y la condición de Riemann concluya que f es integrable en $[0, 2]$.

P2. (i) (2,0 ptos.) Identifique la sumatoria $S_n = 2 \sum_{i=1}^n \frac{(3n+2i)^p}{n^{p+1}}$, $p \in \mathbb{N}$ como una suma de Riemann y calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

(ii) (2,0 ptos.) Considere $I_n(x) = \int_0^x y^n (y^2 + a^2)^{-\frac{1}{2}} dy$. Aplique la técnica de integración por partes para demostrar que:

$$(n+2)I_{n+2}(x) = x^{n+1} \sqrt{x^2 + a^2} - (n+1)a^2 I_n(x), \quad n \geq 0.$$

Indicación: Note que I_{n+2} puede escribirse como $I_{n+2}(x) = \int_0^x y^{n+1} \frac{y}{\sqrt{a^2 + y^2}} dy$.

(iii) (2,0 ptos.) Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_1^x (x-1) \sin(t^2) dt}{\int_1^{x^2} \sin(t^2 - 1) dt}.$$

P3. Considere las funciones $f(x) = \sin(x)$ y $g(x) = \pi x - x^2$ definidas para $x \in [0, \pi]$.

a) (1,0 pto.) Demuestre que $\forall x \in [0, \pi]$, $g(x) \geq f(x)$.

Indicación: Verifique que la función $g(x) - f(x)$ es cóncava en $[0, \pi]$ y concluya.

b) (5,0 ptos.) Para la región R del primer cuadrante definida por

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \in [0, \pi] \wedge y \in [f(x), g(x)]\}$$

se pide calcular el área de R y calcular los volúmenes de los sólidos engendrados por la rotación de R en torno al eje OX y en torno al eje OY .

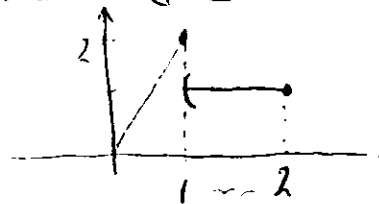
Formulario:

$$A = \int_a^b h(x) dx, \quad V = \pi \int_a^b h^2(x) dx, \quad V = 2\pi \int_a^b x h(x) dx, \quad V = \int_a^b A(x) dx$$

Tiempo 3,0 horas

Pauta Problema 1

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x \in (1,2] \end{cases}$$



a) $P = \{0, 1, 2\}$ partición de $[0,2]$ demostrar que $\Delta(f,P) = 1$; $S(f,P) = 4$

Para $x \in [0,1]$ $\begin{cases} \min\{f(x)\} = \inf\{f(x)\} = m_i(f) = 0 \\ \max\{f(x)\} = \sup\{f(x)\} = M_i(f) = 2 \end{cases} \quad \Delta x_i = 1 - 0 = 1$

Para $x \in (1,2]$ $\begin{cases} \min\{f(x)\} = \inf\{f(x)\} = m_i(f) = 1 \\ \sup\{f(x)\} = M_i(f) = 2 \end{cases} \quad \Delta x_i = 2 - 1 = 1$

Así, $\Delta(f,P) = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1$

$S(f,P) = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 4$

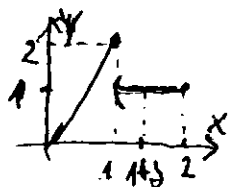
b) $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\delta \in (0,1)$, $P = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n}, 1+\delta, 2\}$

Para $x \in [0,1]$, $x_i = \frac{i}{n}$, $\Delta x_i = \frac{1}{n}$, $f(x) = 2x$

$m_i(f) = f(x_{i-1}) = 2 \frac{i-1}{n}$; $M_i(f) = f(x_i) = 2 \frac{i}{n}$ (f creciente en $[0,1]$)

Para $x \in (1,2]$; $m_i(f) = 1$, $M_i(f) = \sup\{f(x) / x \in [1, 1+\delta]\} = 2$

$M_i(f) = \sup\{f(x) / x \in [1+\delta, 2]\} = 1$



Entonces $\Delta(f,P) = \sum_{i=1}^n 2 \frac{i-1}{n} \cdot \frac{1}{n} + 1 \cdot ((1+\delta) - 1) + 1 \cdot (2 - (1+\delta)) = \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^n (i-1) + \delta + 1 - \delta$

$\Rightarrow \Delta(f,P) = \frac{2}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} i + 1 = \frac{2}{n^2} \frac{(n-1) \cdot n}{2} + 1 = \frac{n-1}{n} + 1 = 2 - \frac{1}{n}$

$S(f,P) = \sum_{i=1}^n 2 \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n} + 2 \cdot ((1+\delta) - 1) + 1 \cdot [2 - (1+\delta)] = \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^n i + 2\delta + 1 - \delta$

$\Rightarrow S(f,P) = \frac{2}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} + 1 + \delta = \frac{n+1}{n} + 1 + \delta = 2 + \delta + \frac{1}{n}$

Así, $S(f,P) - \Delta(f,P) = (2 + \delta + \frac{1}{n}) - (2 - \frac{1}{n}) = \delta + \frac{2}{n}$

c) La condición de Riemann establece que f es integrable en $[0,2]$ si $(\forall \varepsilon > 0) \exists P \in \mathcal{P}_{[0,2]}$; $S(f,P) - A(f,P) \leq \varepsilon$

Para usar (b), se sabe que la partición P allí definida es tal que $S(f,P) - A(f,P) = J + \frac{2}{n}$

0.7 \rightarrow Bastará entonces J y $n \in \mathbb{N}$ tales que $J + \frac{2}{n} < \varepsilon$
Por ejemplo, $J = \frac{\varepsilon}{4}$ arremiendo que $0 < \varepsilon < 2$ en lo cual $J \in (0,1)$ y $\frac{2}{n} = \frac{\varepsilon}{4}$, es decir $\frac{1}{n} \leq \frac{\varepsilon}{8}$ o bien que $n \geq \frac{8}{\varepsilon}$.

En esto, $S(f,P) - A(f,P) = J + \frac{2}{n} = \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

0.8 \rightarrow para cualquier $\varepsilon > 0$ dado.

Punto Problema 2

i) $\Delta_m = 2 \sum_{i=1}^m \frac{(3m+2i)^p}{m^{p+1}}$, $p \in \mathbb{N}$. Se puede escribir como

$$\Delta_m = 2 \sum_{i=1}^m \frac{m^p (3 + 2\frac{i}{m})^p}{m^p \cdot m} = \sum_{i=1}^m (3 + 2\frac{i}{m})^p \frac{2}{m}. \text{ Identificándolo}$$

como punto de Riemann se tiene $\left\{ \begin{array}{l} x_i = a + \frac{b-a}{m} i = 3 + \frac{2}{m} i \\ \frac{b-a}{m} = \frac{2}{m} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} b-a=2 \\ a=3 \\ b=5 \end{array}$
 como punto de Riemann se tiene $f(x_i) = x_i^p$

Entonces, $\lim_{m \rightarrow \infty} (\Delta_m) = \lim_{m \rightarrow \infty} 2 \sum_{i=1}^m \frac{(3m+2i)^p}{m^{p+1}} = \int_3^5 x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} \Big|_3^5 = \frac{5^{p+1} - 3^{p+1}}{p+1}$

ii) Usando la indicación $I_{n+2}(x) = \int_0^x \frac{y^{n+2}}{\sqrt{y^2+a^2}} dy = \int_0^x \frac{y^{n+1}}{\sqrt{a^2+y^2}} dy$

Proponer $u = y^{n+1} \rightarrow du = (n+1)y^n dy$
 $dv = \frac{y}{\sqrt{a^2+y^2}} dy \rightarrow v = \sqrt{a^2+y^2}$

Entonces $I_{n+2}(x) = \frac{y^{n+1}}{\sqrt{a^2+y^2}} \Big|_0^x - (n+1) \int_0^x \frac{y^n \sqrt{a^2+y^2}}{\sqrt{a^2+y^2}} dy = \frac{x^{n+1}}{\sqrt{a^2+x^2}} - (n+1) \int_0^x \frac{y^n (a^2+y^2)}{\sqrt{a^2+y^2}} dy$
 $\Rightarrow I_{n+2}(x) = \frac{x^{n+1}}{\sqrt{a^2+x^2}} - (n+1) \left[a^2 \underbrace{\int_0^x \frac{y^n}{\sqrt{a^2+y^2}} dy}_{I_n} + \underbrace{\int_0^x \frac{y^{n+2}}{\sqrt{a^2+y^2}} dy}_{I_{n+2}} \right]$

Entonces $I_{n+2}(x) = \frac{x^{n+1}}{\sqrt{a^2+x^2}} - (n+1)a^2 I_n(x) - (n+1)I_{n+2}(x)$
 $\Rightarrow (n+2)I_{n+2}(x) = \frac{x^{n+1}}{\sqrt{a^2+x^2}} - (n+1)a^2 I_n(x)$

iii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_1^x (t-1) \sin(t^2) dt}{\int_1^x \sin(t^2-1) dt} \stackrel{L'H \frac{0}{0}}{=} \frac{(x-1) \int_1^x \sin(t^2) dt}{\int_1^x \sin(t^2-1) dt} \stackrel{L'H \frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_1^x \sin(t^2) dt + (x-1) \sin(x^2)}{2x \sin(x^2-1)}$

$\stackrel{L'H \frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 \sin(x^2) + (x-1) 2x \cos(x^2)}{2 \sin(x^2-1) + 2x \cdot 4x^3 \cos(x^2-1)} = \frac{2 \sin(1)}{8} = \frac{\sin(1)}{4}$

Pauta Problema 3

a) $f(x) = \sin x$, $g(x) = \pi x - x^2$ definidas en $[0, \pi]$

Demstrar que $g(x) \geq f(x) \quad \forall x \in [0, \pi]$

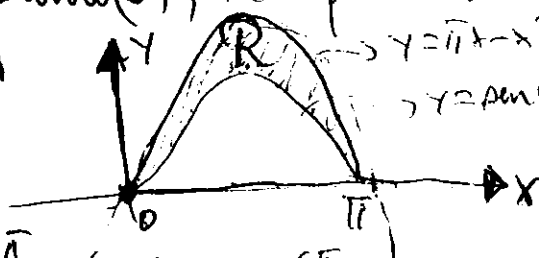
Sea $h(x) = g(x) - f(x) = (\pi x - x^2) - \sin x$, $x \in [0, \pi]$

$h'(x) = \pi - 2x - \cos x$; $h''(x) = -2 + \sin x < 0$ ($-1 \leq \sin x \leq 1$)

0.5) Entoces $g(x) - f(x)$ es concave en $[0, \pi]$, es decir, toda recta que une dos puntos de $h(x)$ en $[0, \pi]$ queda bajo la curva. En especial el eje OX entre $O(0,0)$ y $A(\pi,0)$ queda bajo $h(x)$.

2.5) Entoces $\forall x \in [0, \pi]$ $h(x) = g(x) - f(x) \geq 0$ (eje OX) $\Rightarrow g(x) \geq f(x)$.

b) Según el punto (a), el esquema de las curvas es:



$A(R) = \int_0^{\pi} (g(x) - f(x)) dx = \int_0^{\pi} (\pi x - x^2 - \sin x) dx = \left[\pi \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \cos x \right]_0^{\pi}$

1.0) $A(R) = \frac{\pi^3}{2} - \frac{\pi^3}{3} - 1 - 1 = \frac{\pi^3}{6} - 2$

$V_{OX}(R) = \pi \int_0^{\pi} (g(x)^2 - f(x)^2) dx = \pi \int_0^{\pi} ((\pi x - x^2)^2 - \sin^2 x) dx = \pi \int_0^{\pi} (\pi^2 x^2 - 2\pi x^3 + x^4 - \frac{1 - \cos 2x}{2}) dx$

2.0) $= \pi \left[\pi^2 \frac{x^3}{3} - 2\pi \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \sin 2x \right]_0^{\pi} = \pi \left(\frac{\pi^5}{3} - \frac{\pi^5}{2} + \frac{\pi^5}{5} - \frac{1}{2}\pi \right) = \pi \left(\frac{\pi^5}{30} - \frac{\pi}{2} \right)$

$V_{OY}(R) = 2\pi \int_0^{\pi} x(g(x) - f(x)) dx = 2\pi \int_0^{\pi} x(\pi x - x^2 - \sin x) dx = 2\pi \int_0^{\pi} (\pi x^2 - x^3 - x \sin x) dx$

$= 2\pi \left[\frac{\pi x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^{\pi} - 2\pi \int_0^{\pi} x \sin x dx = 2\pi \frac{\pi^4}{12} - 2\pi \int_0^{\pi} x \sin x dx = \frac{\pi^5}{6} - 2\pi \int_0^{\pi} x \sin x dx$

2.0) Partes: $\int_0^{\pi} x \sin x dx = -x \cos x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx = \pi$ Entoces $V_{OY}(R) = \frac{\pi^5}{6} - 2\pi \cdot \pi = \frac{\pi^5}{6} - 2\pi^2$