

Control 2

P1. i) (2,0 ptos.) Calcule la primitiva

$$\int \frac{x^2 - 2x + 3}{(x-1)^2(x^2+1)} dx$$

ii) (2,0 ptos.) Calcule la integral

$$\int_{4\sqrt{2}}^{9\sqrt{3}} \frac{dx}{x - x^{3/5}}$$

ii) (2,0 ptos.) Sea

$$I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n(x) dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Pruebe que $I_n + I_{n-2} = \frac{1}{n-1}$, $\forall n \geq 2$.

P2. Sea $k \in \mathbb{R}^+$. Considere la función F definida en $[0, \infty)$ por

$$F(x) = \int_0^1 s^k \sin(sx) ds$$

i) (1,0 pto.) Demuestre que $\forall x > 0$,

$$F(x) = \frac{1}{x^{k+1}} \int_0^x t^k \sin(t) dt$$

ii) (2,0 ptos.) Probar que F es derivable en $[0, \infty)$ para lo cual justifique la derivabilidad de F en $(0, \infty)$ y calcule $F'(0)$ usando la definición.

iii) (1,5 ptos.) Demuestre que $\forall x \in [0, \infty)$ se verifica que

$$xF'(x) + (k+1)F(x) = \sin(x)$$

iv) (1,5 ptos.) Explique porqué $F'(x)$ es continua en $(0, \infty)$ (use $F'(x)$ de iii)) y demuestre que $F'(x)$ es también continua en $x = 0$ (use la definición).

P3. Considere la función f definida por

$$f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

con $f(x) \geq 0$.

- a) i) (1,0 pto.) Calcule el área de la región limitada por la curva $f(x)$ ($f(x) \geq 0$), el eje OX y los ceros de f .
ii) (2,5 ptos.) Calcule el volumen del sólido generado por la revolución en torno al eje OY de la región descrita en a) i).

Indicación: Observe que f es una función PAR.

- b) (2,5 ptos.) Calcule el volumen del sólido generado por la revolución en torno al eje OX del área plana limitada por las curvas de ecuaciones

$$x + y = 5 \text{ y } xy = 4$$

Justifique cada uno de sus pasos
Tiempo: 3:00

Primer Problema 1

i) $\int \frac{x^2 - 2x + 3}{(x-1)^2(x^2+1)} dx$ Fracciones Parciales

05 $\frac{x^2 - 2x + 3}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} = \frac{A(x-1)(x^2+1) + B(x^2+1) + (Cx+D)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+1)}$

05 $\text{Coef } x^3: A + C = 0 \Rightarrow A = -1$

$\text{Coef } x^2: -A + B - 2C + D = 1 \Rightarrow B = 1$

$\text{Coef } x: A + C - 2D = -2 \Rightarrow C = 1$

$\text{Coef } 1: -A + B + D = 3 \Rightarrow D = 1$

05 $\text{En } \int \frac{x^2 - 2x + 3}{(x-1)^2(x^2+1)} dx = \int \left(-\frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} \right) dx$

10 $\Rightarrow \int \frac{x^2 - 2x + 3}{(x-1)^2(x^2+1)} dx = -\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \arctan x + C$

ii) $\int_{4\sqrt{2}}^{9\sqrt{3}} \frac{dx}{x - x^{3/5}}$ Por sustitución $x = t^5$, $dx = 5t^4 dt$

$x = 4\sqrt{2} = 2^{5/2} = t^5 \Rightarrow t = \sqrt{2}$

$x = 9\sqrt{3} = 3^{5/2} = t^5 \Rightarrow t = \sqrt{3}$

10 $\text{En } \int_{4\sqrt{2}}^{9\sqrt{3}} \frac{dx}{x - x^{3/5}} = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{5t^4 dt}{t^5 - t^3} = 5 \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{t dt}{t^2 - 1} = \frac{5}{2} \left[\ln|t^2 - 1| \right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} = \frac{5}{2} \ln \frac{2}{2}$

iii) $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n(x) dx$, $n \in \mathbb{N}$.

Una forma puede ser el reemplazo directo en $I_n + I_{n-2}$.

En efecto $I_n + I_{n-2} = \int_0^{\pi/4} \tan^n(x) dx + \int_0^{\pi/4} \tan^{n-2}(x) dx = \int_0^{\pi/4} (\tan^n(x) + \tan^{n-2}(x)) dx$

05 $= \int_0^{\pi/4} \tan^{n-2}(x) (\tan^2(x) + 1) dx = \int_0^{\pi/4} \tan^{n-2}(x) \sec^2(x) dx = \int_0^1 u^{n-2} du \begin{cases} u = \tan(x) \\ du = \sec^2(x) dx \end{cases}$

$= \frac{u^{n-1}}{n-1} \Big|_0^1 = \frac{1}{n-1} \rightarrow$ 05

Punto Problema 2

$$F(x) = \int_0^1 s^k \sin(sx) ds \quad k \in \mathbb{R}^+, F \text{ definida en } [0, \infty)$$

i) Por sustitución sea $t = sx$, $dt = x ds$ $\begin{cases} s=0 \rightarrow t=0 \\ s=1 \rightarrow t=x \end{cases}$

⑩ $\Rightarrow F(x) = \int_0^x \frac{t^k}{x^k} \sin(t) \frac{dt}{x} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{x^{k+1}} \int_0^x t^k \sin(t) dt$

ii) $t^k \sin(t)$ es continua en $(0, \infty)$ por ser producto de continuas

Entonces por T.F.C. $\int_0^x t^k \sin(t) dt$ es derivable en $(0, \infty)$

Además x^{k+1} es derivable en $(0, \infty)$ y por lo tanto $F(x) = \frac{1}{x^{k+1}} \int_0^x t^k \sin(t) dt$

⑩ es derivable en $(0, \infty)$ (cociente de derivables)

Además $F'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(h) - F(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{1}{h^{k+1}} \int_0^h t^k \sin(t) dt \right] \text{ por T.F.C.}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_0^h t^k \sin(t) dt}{h^{k+2}} \stackrel{\text{L'Hop}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^k \sin(h)}{(k+2)h^{k+1}} = \frac{1}{k+2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} = \frac{1}{k+2}$$

⑩ Sigue que $F'(0) = \frac{1}{k+2} \Rightarrow F$ es derivable en $[0, \infty)$

iii) Calculamos $F'(x)$ de $F(x) = \frac{1}{x^{k+1}} \int_0^x t^k \sin(t) dt$

$$\Rightarrow F'(x) = \frac{\left(\int_0^x t^k \sin(t) dt \right)' x^{k+1} - \left(\int_0^x t^k \sin(t) dt \right) (k+1) x^k}{x^{2k+2}} \Rightarrow$$

$$F'(x) = \frac{\underbrace{t^k \sin(t)}_{\text{T.F.C.}} \cdot x^{k+1} - (k+1) x^k \int_0^x t^k \sin(t) dt}{x^{2k+2}} = \frac{\sin x}{x} - (k+1) \frac{1}{x} \int_0^x t^k \sin(t) dt$$

⑩ $\Rightarrow F'(x) = \frac{\sin x}{x} - (k+1) \frac{F(x)}{x} \Leftrightarrow x F'(x) + (k+1) F(x) = \sin x$

iv) $F'(x) = \frac{\sin x}{x} - (k+1) \frac{F(x)}{x}$ es continua en $(0, \infty)$ por algebra de continuas

⑩.5 $(x, \sin x, F(x), \text{cocientes y sumas lo son})$

Continuidad de F' en $x=0$: $\lim_{x \rightarrow 0} F'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin x}{x} - (k+1) \frac{F(x)}{x} \right] =$

⑩ $= 1 - (k+1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x} = 1 - (k+1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t^k \sin(t) dt}{x^{k+2}} \stackrel{\text{L'Hop}}{=} 1 - (k+1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^k \sin x}{x^{k+2}} = 1 - \frac{k+1}{k+2} \frac{\sin x}{x} \rightarrow 1 - \frac{k+1}{k+2} = \frac{1}{k+2} = F'(0)$

$\Rightarrow F'$ es continua en 0 //

Pente Probleme 3

a) $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$, $f(x) \geq 0$

i) Area

Los curvas form $(-1,1)$ y f es función PAR

Entonces $Area = \int_{-1}^1 f(x) dx = 2 \int_0^1 f(x) dx$

$\Rightarrow A = 2 \int_0^1 \frac{1-x^2}{1+x^2} dx = 2 \int_0^1 \frac{2-(1+x^2)}{1+x^2} dx$

$\Rightarrow A = 2 \int_0^1 \left[\frac{2}{1+x^2} - 1 \right] dx = 2 \left[2 \arctan x - x \right]_0^1 = 2 \left[2 \frac{\pi}{4} - 1 \right]$

$\Rightarrow A = \pi - 2$

ii) Volumen de Revolución en torno al eje OY

$V_{OY} = 2\pi \int_0^1 x f(x) dx = 2\pi \int_0^1 x \frac{1-x^2}{1+x^2} dx = 2\pi \int_0^1 x \left[\frac{2}{1+x^2} - 1 \right] dx$

$= 2\pi \int_0^1 \left[\frac{2x}{1+x^2} - x \right] dx = 2\pi \left[\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 = 2\pi \left(\ln 2 - \frac{1}{2} \right)$

o bien $V_{OY} = \pi (2 \ln 2 - 1)$

b)

Las curvas son $x+y=5$ y $x^2+y=4$

Donde $y=5-x \Rightarrow x(5-x)=4 \Rightarrow x^2-5x+4=0$

$\Rightarrow x=1, y=4$
 $x=4, y=1$ Pto de \cap .

$V_{OX} = \pi \int_1^4 (t_1^2 - t_2^2) dx$

Entonces $V_{OX} = \pi \int_1^4 \left[(5-x)^2 - \frac{16}{x^2} \right] dx$

$= \pi \int_1^4 \left[25 - 10x + x^2 - \frac{16}{x^2} \right] dx$

$\Rightarrow V_{OX} = \pi \left[25x - 5x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{16}{x} \right]_1^4 = \pi \left[100 - 80 + \frac{64}{3} + 4 - \left(20 + \frac{1}{3} + 16 \right) \right]$

$\Rightarrow V_{OX} = 9\pi$