



## CONTROL 2

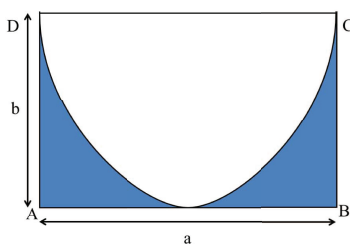
P1. a) (3,0 ptos.) Dada la función

$$f(x) = \int_x^2 \frac{1}{\sqrt{1+t^3}} dt.$$

Calcular

$$\int_0^2 x f(x) dx.$$

b) (3,0 ptos.) Demuestre que en todo rectángulo de lados  $a$  y  $b$ , la parábola que pasa por sus dos vértices superiores y el punto medio del lado inferior (ver figura), cubre siempre una misma fracción del área del rectángulo.



P2. a) (2,0 ptos.) Demuestre que

$$J = \int_0^4 x \sqrt{4 - (x-2)^2} dx = 4\pi.$$

b) Considere la función  $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $f(x) = \int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t} dt$ .

i) (1,0 pto.) Demuestre que  $\forall x > 0, f(x) \geq 0$ .

ii) (2,0 ptos.) Demuestre que  $f(x) + f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{2}(\ln(x))^2$ .

iii) (1,0 pto.) Calcule el área encerrada entre la curva  $g(x) = \frac{\ln(x)}{1+x}$  y el eje  $OX$  desde  $x = \frac{1}{e}$  hasta  $x = e$ .

P3. a) i) (1,5 ptos.) Calcule  $\int \ln(1+x^2) dx$ .

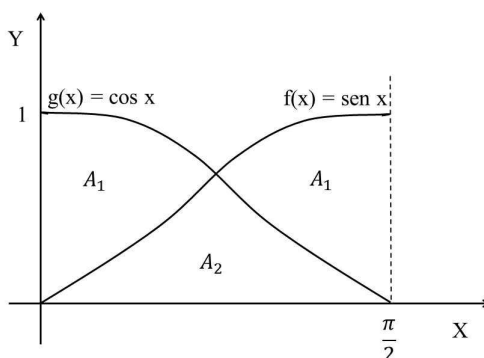
ii) (1,5 ptos.) Calcule

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \ln \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \left[ 1 + \left( \frac{k\pi}{n} \right)^2 \right]} \right\}.$$

b) Dadas las funciones  $f(x) = \sin(x)$  y  $g(x) = \cos(x)$ , determine:

i) (1,0 pto.) El volumen del sólido de revolución engendrado al rotar el área achurada  $A_1$ , en torno al eje  $OX$ .

ii) (2,0 ptos.) El volumen del sólido de revolución engendrado al rotar el área  $A_2$ , en torno al eje  $OY$ .



# Cálculo Diferencial e Integral (13-2)

## Control 2 Pauta Problema 1

a)  $f(x) = \int_x^2 \frac{1}{\sqrt{1+t^3}} dt$  . Calcular  $\int_0^2 x f(x) dx$

Integrando por partes

$$I = \int_0^2 x f(x) dx = uv \Big|_0^2 - \int_0^2 v du$$

$$u = f(x) \rightarrow du = f'(x) dx$$

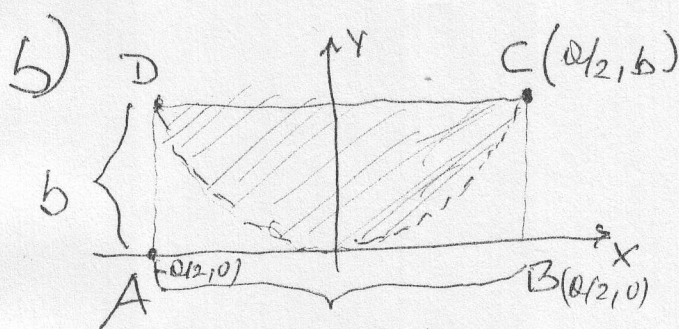
$$dv = x dx \rightarrow v = \frac{1}{2} x^2$$

Donc  $I = \frac{1}{2} x^2 f(x) \Big|_0^2 - \frac{1}{2} \int_0^2 x^2 f'(x) dx$  donde  $f(2) = \int_2^2 \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}} = 0$

1.5 y  $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}$  por T.F.C. Entonces  $I = +\frac{1}{2} \int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}} dx$

Por sustitución, sea  $\Delta = x^3 + 1$ ;  $d\Delta = 3x^2 dx$ , entonces.

1.0  $I = \frac{1}{2} \int_1^9 \frac{1}{3} \frac{d\Delta}{\sqrt{\Delta}} = \frac{1}{6} \int_1^9 \Delta^{-1/2} d\Delta = \frac{2}{3} \sqrt{\Delta} \Big|_1^9 = \frac{1}{3} (3-1) = \frac{2}{3}$



Una forma es establecer la parábola que pase por los vértices superiores C y D y el punto O (origen) punto medio del lado AB

La parábola es  $y = px^2$  y  $C(a/2, b)$  es punto de ella.

2.0 Donc,  $b = p \frac{a^2}{4} \Rightarrow p = \frac{4b}{a^2}$ , entonces la parábola queda  $y = \frac{4b}{a^2} x^2$

El area será la comprendida entre la recta  $y=b$  y la parábola

Donc,  $Area = 2 \int_0^{a/2} [b - \frac{4b}{a^2} x^2] dx = 2 \left[ bx - \frac{4b}{a^2} \frac{x^3}{3} \right]_0^{a/2}$

1.5  $= 2 \left[ \frac{ab}{2} - \frac{4b}{a^2} \frac{a^3}{24} \right] = 2 \left[ \frac{ab}{2} - \frac{ab}{6} \right] = \frac{2}{3} ab$

0.5 En consecuencia, para cualquier rectángulo de lados  $a$  y  $b$  el area al la parábola indicada es siempre  $\frac{2}{3}$  del area del rectángulo.



## Punto Problema 2

a)  $J = \int_0^4 x \sqrt{4 - (x-2)^2} dx$ . Demostrar que  $J = 4\pi$

Sustitución  $x-2 = 2\sin t$ ,  $dx = 2\cos t dt$

Si  $x=0$ ;  $\sin t = -1 \Rightarrow t = -\pi/2$

$x=4$ ;  $\sin t = 1 \Rightarrow t = \pi/2$ . Entonces

$$J = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2+2\sin t) \sqrt{4-4\sin^2 t} \cdot 2\cos t dt = 8 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1+\sin t) \cos t \cdot \cos t dt$$

(10)  $\Rightarrow J = 8 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1+\sin t) \cos^2 t dt = 8 \left[ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t dt + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin t \cos^2 t dt \right]$

Función PAR      Función IMPAR

$$= 8 \cdot 2 \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2} dt$$

(10)  $= \frac{16}{2} \int_0^{\pi/2} (1+\cos 2t) dt = 8 \left[ t + \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{\pi/2} = 8 \frac{\pi}{2} = 4\pi$

o sea,  $J = 4\pi$

b)  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  definido por  $f(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t} dt$

i) Demostrar  $\forall x > 0$ ,  $f(x) \geq 0$

Si  $x \in (0,1)$ ,  $f(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t} dt = - \int_x^1 \frac{\ln t}{1+t} dt$  por  $\ln t < 0$  en  $t < 1$

(0.5) entonces  $f(x) \geq 0 \forall x \in (0,1)$  y  $f(x) = 0$  si  $x=1$

Si  $x \in (1, \infty)$  el integrando y el recorrido de la integral son positivos y por lo tanto  $f(x) \geq 0 \forall x \in (1, \infty)$

(0.5) Sigue que  $\forall x > 0$ ,  $f(x) \geq 0$

ii) Demostrar que  $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}(\ln x)^2$

Por definición de  $f(x)$ ,  $f\left(\frac{1}{x}\right) = \int_1^{1/x} \frac{\ln t}{1+t} dt$

por sustitución, sea  $u = \frac{1}{t}$ , entonces  $t = \frac{1}{u}$ ;  $dt = -\frac{du}{u^2}$

y para  $t=1$ ,  $u=1$  y para  $t=\frac{1}{x}$ ,  $u=x$

$$\text{Así } f\left(\frac{1}{x}\right) = \int_1^{1/x} \frac{\ln t}{1+t} dt = \int_1^x \frac{\ln(1/u)}{1+1/u} \left(-\frac{du}{u^2}\right) = - \int_1^x \frac{-\ln u}{u^2+u} du$$

$$\textcircled{10} \Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) = \int_1^x \frac{\ln u}{u(u+1)} du = \int_1^x \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right) \ln u du \quad (\text{Fracciones Parciales})$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) = \int_1^x \frac{\ln u}{u} du - \int_1^x \frac{\ln u}{1+u} du \quad \text{en donde la primera integral es calculable y } \int_1^x \frac{\ln u}{1+u} du = f(x).$$

$$\text{Como } \int_1^x \frac{\ln u}{u} du = \frac{1}{2}(\ln u)^2 \Big|_1^x = \frac{1}{2}(\ln x)^2 \quad \text{se tiene que}$$

$$\textcircled{10} \Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 - f(x) \Leftrightarrow f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}(\ln x)^2$$

iii) El área entre  $g(x) = \frac{\ln x}{1+x}$  y el eje ox entre  $x = \frac{1}{e}$  y  $x = e$  es  $A = \int_{1/e}^e |g(x)| dx$  donde  $g(x) < 0$  si  $x \in (1/e, 1)$  y  $g(x) > 0$  si

$$\textcircled{05} \rightarrow x \in (1, e). \text{ Entonces } A = \int_{1/e}^1 -g(x) dx + \int_1^e g(x) dx = \int_{1/e}^e |g(x)| dx = \int_{1/e}^e g(x) dx$$

$$\text{Así, } A = \int_{1/e}^e \frac{\ln x}{1+x} dx = f\left(\frac{1}{e}\right) + f(e) \quad \text{según definición de } f(x)$$

$$\textcircled{05} \text{ y según (ii) } f\left(\frac{1}{e}\right) + f(e) = \frac{1}{2}(\ln e)^2 = \frac{1}{2}. \text{ Entonces } A_{\text{req}} = \frac{1}{2}$$

OBSERVACIÓN: La parte (ii) también puede demostrarse verificando que  $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$  y  $\frac{1}{2}(\ln x)^2$  tienen igual derivada y por lo tanto difieren en una constante, lo que vale 0 evaluando las funciones anteriores en  $x=1$



# Punto Problema 3

a) i) Calcular  $\int \ln(1+x^2) dx = x \ln(1+x^2) - 2 \int \frac{x^2 dx}{1+x^2}$

Por partes  $u = \ln(1+x^2) \rightarrow du = \frac{2x dx}{1+x^2}$   
 $dv = dx \rightarrow v = x$

(0.5)

donde  $\int \frac{x^2 dx}{1+x^2} = \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2} dx = \int (1 - \frac{1}{1+x^2}) dx = x - \arctan x$

(10) Asi  $\int \ln(1+x^2) dx = x \ln(1+x^2) - 2x - 2 \arctan x + C$

ii) Calcular  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \ln \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \left[ 1 + \left( \frac{k\pi}{n} \right)^2 \right]} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} \ln \prod_{k=1}^n \left[ 1 + \left( \frac{k\pi}{n} \right)^2 \right] \right\}$

$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} \left( \ln \left( 1 + \left( \frac{\pi}{n} \right)^2 \right) + \ln \left( 1 + \left( \frac{2\pi}{n} \right)^2 \right) + \dots + \ln \left( 1 + \left( \frac{n\pi}{n} \right)^2 \right) \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left( 1 + \left( \frac{k\pi}{n} \right)^2 \right)$

$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \ln \left[ 1 + \left( \frac{k\pi}{n} \right)^2 \right] \frac{1}{n} = \frac{1}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left[ 1 + \left( \frac{k\pi}{n} \right)^2 \right] \frac{\pi}{n}$

y este ultimo limite es una suma de Riemann tal que

(10)  $x_k = a + \frac{b-a}{n} k = \frac{k\pi}{n} \wedge \frac{b-a}{n} = \frac{\pi}{n} \Rightarrow \begin{cases} b-a = \pi \\ a = 0 \end{cases} \wedge f(x) = \ln(1+x^2)$

Entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \ln \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \left[ 1 + \left( \frac{k\pi}{n} \right)^2 \right]} \right\} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \ln(1+x^2) dx$  y  
 calculando en (e)

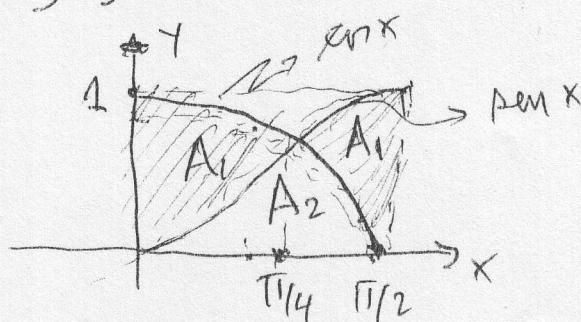
usando (e)

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \ln \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \left[ 1 + \left( \frac{k\pi}{n} \right)^2 \right]} \right\} = \frac{1}{\pi} \left[ x \ln(1+x^2) - 2x + 2 \arctan x \right]_0^{\pi}$

(0.5)

$= \ln(1+\pi^2) - 2 + \frac{2}{\pi} \arctan(\pi)$

b) i)



$V_{OX}(\Delta_1) = \pi \int_0^{\pi/4} (\cos^2 x - \sin^2 x) dx + \pi \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\sin^2 x - \cos^2 x) dx$   
 $= \pi \int_0^{\pi/4} \cos 2x dx - \pi \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos 2x dx$   
 $= \pi \left[ \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\pi/4} - \pi \left[ \frac{1}{2} \sin 2x \right]_{\pi/4}^{\pi/2}$   
 $= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$

(1.0)

ii) Para el Volumen de Revolución de  $A_2$  en torno a  $OY$  se tiene

$$V_{OY}(A_2) = 2\pi \int_0^{\pi/4} x \sin x \, dx + 2\pi \int_{\pi/4}^{\pi/2} x \cos x \, dx$$

0.5

Partes

$$u = x \rightarrow du = dx \\ dv = \sin x \rightarrow v = -\cos x$$

$$u = x \rightarrow du = dx \\ dv = \cos x \rightarrow v = \sin x$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow V_{OY}(A_2) &= 2\pi \left[ -x \cos x \Big|_0^{\pi/4} + \int_0^{\pi/4} \cos x \, dx \right] + 2\pi \left[ x \sin x \Big|_{\pi/4}^{\pi/2} - \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin x \, dx \right] \\ &= 2\pi \left[ -\frac{\pi}{4} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right] + 2\pi \left[ \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right] \\ &= 2\pi \left[ -\frac{\pi}{4} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right] = 2\pi \left[ \frac{\pi}{2} - \frac{\pi \sqrt{2}}{2} \right] \end{aligned}$$

10

0.5

$$V_{OY}(A_2) = \pi^2 \left[ 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$$