

Control 2, MA-1A2 Cálculo Diferencial e Integral
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile
Semestre 2007/2 (29 de Agosto)

- P1)** a) Dada una función continua f , se definen las integrales $A = \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx$, $B = \int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx$ y $C = \int_0^{\pi/2} f(\sin 2x) dx$.
- i) (2 ptos.) Mediante cambios de variable apropiados, demuestre que $A = B = C$.
- ii) (1 ptos.) Si además se sabe que $f(xy) = f(x) + f(y)$, pruebe que $C = -\frac{\pi}{2}f(2)$.

Solución

En A usamos el cambio de variable $u = \frac{\pi}{2} - x$ y resulta:

$$A = - \int_{\pi/2}^0 f\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\right) du = \int_0^{\pi/2} f(\sin(u)) du = B$$

0.5 ptos.

En C usamos $u = 2x$ con lo cual $du = 2dx$

$$C = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} f(\sin u) du$$

0.5 ptos.

Esta integral se descompone en la suma

$$C = \frac{1}{2} \left(B + \int_{\pi/2}^{\pi} f(\sin u) du \right)$$

0.5 ptos.

Ahora usamos el cambio de variable $u = \pi - t$ y obtenemos

$$C = \frac{1}{2} \left(B - \int_{\pi/2}^0 f(\sin(\pi - t)) dt \right) = \frac{1}{2} \left(B + \int_0^{\pi/2} f(\sin t) dt \right) = B$$

0.5 ptos.

Para el cálculo descomponemos así:

$$C = \int_0^{\pi/2} f(2\sin x \cos x) dx = \int_0^{\pi/2} f(2) dx + A + B$$

0.5 ptos.

de donde $A = -\frac{\pi}{2}f(2)$

0.5 ptos.

- b) i) (1.5 ptos.) Dados $m, n \in \mathbb{N}^*$, calcule la integral $I_{m,n} = \int_0^{2\pi} \sin(nx)\sin(mx) dx$, separando los casos $m = n$ de $m \neq n$.
Ind: Recuerde que $\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)}{2}$
- ii) (1.5 ptos.) Use el resultado anterior para calcular $J_m = \int_0^{2\pi} f(x)\sin(mx)dx$, $\forall m \in \mathbb{N}^*$, para la función definida por $f(x) = \sum_{k=1}^{100} a_k \sin(kx)$. Distinga los casos $m \leq 100$ de $m > 100$.

Solución

Parte i: Usando la indicación se tiene que

$$I_{m,n} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left\{ \cos((n-m)x) - \cos((n+m)x) \right\} dx$$

.....
Si $m = n$ esta integral queda

$$I_{m,n} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left\{ 1 - \cos((n+m)x) \right\} dx = \pi$$

.....
Si $m \neq n$ esta integral queda

$$I_{m,n} = 0$$

.....
Parte ii: Como $f(x) = \sum_{k=1}^{100} a_k \sin(kx)$ se tiene que

$$\begin{aligned} J_m &= \int_0^{2\pi} f(x) \sin(mx) dx \\ &= \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{100} a_k \sin(kx) \sin(mx) dx \\ &= \sum_{k=1}^{100} a_k I_{k,m} \end{aligned}$$

.....
Usando la parte (a) se tiene que $I_{k,m} \neq 0$ solo para $k = m$. Luego los términos $k \neq m$ de la suma son nulos.

.....
Así:

$$J_m = \begin{cases} \pi a_m & \text{si } m \leq 100 \\ 0 & \text{si } m > 100. \end{cases}$$

.....
0.5 pts.

P2) a) Considere la función $f(x) = x - \frac{1}{x} - 2 \ln x$.

- (1 pts.) Encuentre dominio, un cero y límites cuando $x \rightarrow 0^+$ y cuando $x \rightarrow +\infty$ de f .
- (1 pts.) Calcule f' y determine intervalos de crecimiento de f y puntos extremos locales y globales de f (si existen).
- (1 pts.) Calcule f'' y determine intervalos donde f es cóncava y donde es convexa. Encuentre las inflexiones de f . Bosqueje el grafo de f .

Solución

Parte i: El dominio de la función es \mathbb{R}_+^* debido a la presencia del logaritmo.

0.2 pts.

Los ceros se obtienen resolviendo la ecuación $x = \frac{1}{x} + 2 \ln x$. Por inspección un cero es $x = 1$

0.2 pts.

Cuando $x \rightarrow 0^+$ se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x - \frac{1}{x} - 2 \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{x}(1 - x^2 - 2x \ln x) = -\infty \cdot 1 = -\infty$$

0.3 pts.

Cuando $x \rightarrow +\infty$ se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \frac{1}{x} - 2 \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - \frac{1}{x^2} - 2\frac{\ln x}{x}) = +\infty \cdot 1 = +\infty$$

0.3 pts.

Parte ii: Cálculo de f' :

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} = \frac{(x-1)^2}{x^2}$$

0.5 pts.

La función es estrictamente creciente en todo su dominio.

0.5 pts.

Parte iii: Cálculo de f'' :

$$f''(x) = -2\frac{1}{x^3} + \frac{2}{x^2} = \frac{2(x-1)}{x^3}$$

0.25 pts.

Por lo tanto la función es convexa para $x > 1$ y concava para $x < 1$

0.5 pts.

Posee un punto de inflexión en $x = 1$

0.25 pts.

b) (3 pts.) Usando la condición de Riemann, demuestre que la función f definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

es Riemann integrable en el intervalo $[0, 2]$.

(Ind: Dada una partición $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ vea donde se cumple $m_k(f) < M_k(f)$)

Solución

Usando la condición de Riemann, debe probarse que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists P \in \mathcal{P}_{[a,b]}, \text{ tal que } S(f, P) - s(f, P) \leq \varepsilon$$

0.5 pts.

Sea entonces $\varepsilon > 0$ e intentemos encontrar la "buena" partición P .

Si $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ se tiene que

$$m_k(f) = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} = f(x_{k-1}) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_{k-1} \leq 1 \\ 2 & \text{si } x_{k-1} > 1 \end{cases}$$

Además,

$$M_k(f) = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} = f(x_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_k \leq 1 \\ 2 & \text{si } x_k > 1 \end{cases}$$

1.0 pts.

Por lo tanto $m_k < M_k$ solamente en el intervalo de la partición que cumpla $x_{k-1} \leq 1 < x_k$. Así

$$S(f, P) - s(f, P) = \Delta x_k$$

1.0 pts.

La condición de Riemann se cumple con cualquier partición tal que su intervalo en torno a $x = 1$ tenga largo menor o igual a ε .

Por ejemplo sirven:

- Particiones equiespaciadas tal que $\frac{2}{n} \leq \varepsilon$
- Particiones no equiespaciadas tales que $|P| \leq \varepsilon$
- La partición $P = \{0, 1, 1 + \varepsilon, 2\}$

0.5 pts.

P3) a) (2 pts.) Sean $x, t \in [0, 1]$ y f continua en $[0, 1]$, se define la función g como

$$g(x) = \int_0^1 e^{-|x-t|} f(t) dt.$$

Calcule $g'(x)$ y verifique que $g'(0) = g(0)$.

(Ind: Separe en forma apropiada la integral que define a g , recordando que $\int_a^b h = \int_a^x h + \int_x^b h$)

Solución

Usamos la indicación

$$g(x) = \int_0^1 e^{-|x-t|} f(t) dt = \int_0^x e^{-|x-t|} f(t) dt + \int_x^1 e^{-|x-t|} f(t) dt.$$

Y recordando que

$$y \in [0, x] \Rightarrow -|x-t| = t-x,$$

$$y \in [x, 1] \Rightarrow -|x-t| = x-t.$$

Se sigue que

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_0^x e^{t-x} f(t) dt + \int_x^1 e^{x-t} f(t) dt \\ &= e^{-x} \int_0^x e^t f(t) dt + e^x \int_x^1 e^{-t} f(t) dt \end{aligned}$$

0.5 ptos.

Ahora

$$g'(x) = \left(e^{-x} \int_0^x e^t f(t) dt \right)' + \left(e^x \int_x^1 e^{-t} f(t) dt \right)'$$

Por T.F.C. (f es continua):

$$\begin{aligned} g'(x) &= -e^{-x} \int_0^x e^t f(t) dt + \cancel{e^{-x} e^x f(x)} + e^x \int_x^1 e^{-t} f(t) dt + \cancel{(-e^x e^x f(x))} \\ &= -e^{-x} \int_0^x e^t f(t) dt + e^x \int_x^1 e^{-t} f(t) dt \end{aligned}$$

1.0 ptos.

Luego,

$$\begin{aligned} g'(0) &= -e^{-0} \int_0^0 \cancel{e^t f(t)} dt + e^0 \int_0^1 e^{-t} f(t) dt \\ &= \int_0^1 e^{-t} f(t) dt = g(0) \end{aligned}$$

0.5 ptos.

b) Calcule las siguientes primitivas:

i) (1 ptos.) $I = \int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx.$

ii) (1.5 ptos.) $J = \int \frac{x^2+5}{(x-2)^3(x^2+4)} dx.$ Aquí use separación en fracciones parciales pero NO CALCULE las constantes.

iii) (1.5 ptos.) $K_n = \int x^n \sqrt{x+1} dx, (n \in \mathbb{N}).$ Aquí encuentre una fórmula de recurrencia entre K_n y K_{n-1} y calcule explícitamente K_0 .

Solución

Parte i: Hacemos el cambio de variables $u = \sqrt{x}$ o equivalentemente $x = u^2$. Así, $dx = 2u du$ y

$$I = \int \frac{u}{1+u} 2u du = 2 \int \frac{u^2 - 1 + 1}{u+1} du = 2 \int u - 1 + \frac{1}{u+1} du$$

De este modo resulta

$$I = u^2 - 2u + 2 \ln |u+1| + C$$

Es decir, volviendo a la variable original,

$$I = x - 2\sqrt{x} + 2 \ln(\sqrt{x} + 1) + C$$

Parte ii: Separando en fracciones parciales (SIN CALCULAR LAS CONSTANTES) se tiene que

$$\frac{x^2 + 5}{(x-2)^3(x^2+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{(x-2)^3} + \frac{DX+E}{x^2+4}.$$

Así se obtiene que

$$J = A \ln |x-2| - \frac{B}{x-2} - \frac{C}{2(x-2)^2} + \frac{D}{2} \ln(x^2+4) + \frac{E}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + K.$$

El caso $n = 0$ es directamente $K_0 = \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + C$.

Para la fórmula por recurrencia, integramos por partes del modo siguiente:

$$\begin{aligned} u &= x^n & du &= nx^{n-1} \\ dv &= \sqrt{x+1} & v &= \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} \end{aligned}$$

Así se obtiene

$$\begin{aligned} K_n &= x^n \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} - \int nx^{n-1} \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} dx \\ &= \frac{2}{3} x^n (x+1)^{3/2} - \frac{2n}{3} \int x^{n-1} (x+1) \sqrt{x+1} dx \\ &= \frac{2}{3} x^n (x+1)^{3/2} - \frac{2n}{3} (K_n + K_{n-1}) \end{aligned}$$

De esta ecuación despejamos K_n para obtener que

$$K_n = \frac{2x^n(x+1)^{3/2} - 2nK_{n-1}}{3+2n}$$