SOLUCIÓN APUNTE MA1002
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL
SEMANA 7

Autor: Nicolás Igor Tapia Rivas

Use este material con responsabilidad.

P1.

a) Del semestre anterior sabemos que q^x es estrictamente decreciente y positiva cuando $0 < q < 1$. Luego en $[0, n]$ se cumple:

$$q^0 = 1 > q^x > 0 \qquad \forall x \in [0, n]$$

Como q^x está definida para $q \in \mathbb{R}^+$, tenemos todas las hipótesis para afirmar que q^x es Riemann-integrable (puesto que es definida, acotada y monótona). Veamos que a_n es estrictamente creciente:

$$a_{n+1} - a_n = \int_0^{n+1} q^x dx - \int_0^n q^x dx = \int_n^{n+1} q^x dx$$

Sea $P \in \mathcal{P}_{n,n+1}$, $P = \{x_0, \dots, x_r\}$ equiespaciada, luego:

$$\int_n^{n+1} q^x dx \geq \sum_{i=1}^{r} q^{x_i}|P| \quad ; q^x > 0,\ \forall x \in [n, n+1],\ \text{y } |P| > 0,\ \text{luego } \sum_{i=1}^{r} q^{x_i}|P| > 0 \text{ y}$$

$$a_{n+1} - a_n \geq \sum_{i=1}^{r} q^{x_i}|P| > 0 \Rightarrow a_n \text{ estrictamente creciente.}$$

b) Sea $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ una particion de $[0, n]$ donde $x_i = i$. Como q^x es decreciente, $M_i(q^x) = q^{x_{i-1}}$ y $m_i(q^x) = q^{x_i}$. Además $\Delta x_i = 1$. Luego:

$$\begin{aligned} s(q^x, P) &= \sum_{i=1}^{n} q^{x_i} \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} q^i = \frac{q - q^{n+1}}{1 - q} \\ S(q^x, P) &= \sum_{i=1}^{n} q^{x_{i-1}} \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} q^{i-1} = \sum_{i=0}^{n-1} q^i = \frac{1 - q^n}{1 - q} \end{aligned}$$

c) $\forall n \in \mathbb{N}$ se tiene:

$$s(q^x, P) \leq \int_0^n q^x dx \leq S(q^x, P)$$

$$q\frac{1 - q^n}{1 - q} \leq \int_0^n q^x dx \leq \frac{1 - q^n}{1 - q} \leq \frac{1}{1 - q}$$

Lo último puesto que $0 < q^n < 1\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow 1 - q^n < 1$.

d) Luego tenemos que

$$q\frac{1 - q^n}{1 - q} \leq a_n \leq \frac{1}{1 - q}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Como a_n es creciente y acotada superiormente, converge. Por propiedad de las sucesiones, la misma desigualdad es válida en el límite, y tomando en cuenta que $q^n \to 0$ se concluye el resultado.

P2.

a) Sea $P \in \mathcal{P}_{a,b}$. Calculemos las sumas inferior y superior:

$$s\left(\frac{1}{f}, P\right) = \sum_{i=1}^{n} m_i\left(\frac{1}{f}\right)\Delta x_i \qquad S\left(\frac{1}{f}, P\right) = \sum_{i=1}^{n} M_i\left(\frac{1}{f}\right)\Delta x_i$$

Notemos que:

$$M_i\left(\frac{1}{f}\right) = \frac{1}{m_i(f)} \qquad m_i\left(\frac{1}{f}\right) = \frac{1}{M_i(f)}$$

Luego tenemos que:

$$S\left(\frac{1}{f}, P\right) - s\left(\frac{1}{f}, P\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{m_i(f)} - \frac{1}{M_i(f)}\right)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}\frac{M_i(f) - m_i(f)}{m_i(f)M_i(f)}\Delta x_i$$

Como $c < f(x),\ \forall x \in [a, b]$, tenemos $(m_i(f)M_i(f))^{-1} < c^{-2}$. Usando esto:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{M_i(f) - m_i(f)}{m_i(f)M_i(f)}\Delta x_i < \frac{1}{c^2}\sum_{i=1}^{n}(M_i(f) - m_i(f))\Delta x_i = \frac{1}{c^2}(S(f, P) - s(f, P))$$

Por lo que se concluye el resultado.

b) Veamos que $\frac{1}{f}$ cumple la condición de Riemann, es decir

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists P \in \mathcal{P}_{[a,b]}, \quad S\left(\frac{1}{f}, P\right) - s\left(\frac{1}{f}, P\right) < \varepsilon$$

Usando la parte a), vemos que solo necesitamos que exista P tal que $S(f, P) - s(f, P) < c^2\varepsilon$. Sea entonces $\varepsilon > 0$. Como f es Riemann-integrable, cumple la condición de Riemann, por lo que para $c^2\varepsilon > 0$ existe $P_0 \in \mathcal{P}_{[a,b]}$ tal que $S(f, P_0) - s(f, P_0) < c^2\varepsilon$. Por la parte a) se tiene entonces:

$$S\left(\frac{1}{f}, P_0\right) - s\left(\frac{1}{f}, P_0\right) < \frac{1}{c^2}(S(f, P_0) - s(f, P_0)) < \frac{1}{c^2}c^2\varepsilon = \varepsilon$$

Luego basta tomar $P = P_0$ y se tiene lo pedido.

P3.

a) Como f es no negativa y creciente, no puede tener asíntotas verticales. Además en $[1, n]$ se cumple:

$$f(1) \leq f(x) \leq f(n), \qquad \forall x \in [1, n]$$

Como f está definida, es monótona y es acotada, es integrable en $[1, n]$. Sea entonces la partición $P = \{x_0 = 1, \ldots, x_{n-1} = n\}$ donde $x_i = i + 1$, $i \in \{0, \ldots, n-1\}$.

Como f es creciente, $M_i(f) = f(x_i) = f(i+1)$ y $m_i(f) = f(x_{i-1}) = f(i)$. Además $\Delta x_i = 1$. Luego:

$$\begin{aligned} S(f, P) &= \sum_{i=1}^{n-1} M_i(f)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n-1} f(i+1) = \sum_{i=2}^{n} f(i) \\ s(f, P) &= \sum_{i=1}^{n-1} m_i(f)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n-1} f(i) \end{aligned}$$

Luego:

$$s(f, P) \leq \int_1^n f(x)dx \leq S(f, P)$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} f(i) \leq \int_1^n f(x)dx \leq \sum_{i=2}^{n} f(i) \qquad \forall n \geq 2$$

b) Claramente $f(x) = \ln(x)$ es creciente y no negativa en $[1, \infty)$. Usaremos entonces lo visto en a). Veamos primero que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} \ln(i) &= \ln\left(\prod_{i=1}^{n-1} i\right) = \ln((n-1)!) \\ \sum_{i=2}^{n} \ln(i) &= \ln\left(\prod_{i=2}^{n} i\right) = \ln(n!) \\ \int_1^n \ln(x)dx &= (x\ln(x) - x)\Big|_1^n = n\ln(n) - n + 1 \qquad (*) \end{aligned}$$

(*) *Esta integración no es parte de los contenidos de la Semana 7, por eso el apunte les da la solución mediante una indicación, pero la indicación está mala y anoto el resultado correcto.*

Ahora juntaremos todo, pero note que la parte a) solamente es válida para $n \geq 2$. Debido a su crecimiento, aplicar la función exponencial a nuestras desigualdades no las cambiará.

$$\begin{array}{ccccc} \ln((n-1)!) & \leq & n\ln(n) - n + 1 & \leq & \ln(n!) \\ (n-1)! & \leq & e^{n\ln(n)-n+1} & \leq & n! \\ (n-1)! & \leq & e^{n\ln(n)}e^{-n+1} & \leq & n! \\ (n-1)! & \leq & n^n e^{-n+1} & \leq & n! \end{array}$$

El caso $n = 1$ se comprueba por simple evaluación obteniendo $1 \leq 1 \leq 1$. Con esto demostramos lo pedido $\forall n \geq 1$.

P4. Pendiente.

P5.

a) Siguiendo la indicación, sea $P \in \mathcal{P}_{[0,1]}$ con $P = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$. Veamos que la función $f(x) = e^{-x^2}$ es decreciente en $[0,1]$. En efecto, el exponente se hace cada vez más negativo mientras x crece, con lo que la exponencial decrece. Luego los máximos y los mínimos en cada intervalo de la partición son $M_i(f) = f(x_{i-1})$ y $m_i(f) = f(x_i)$. Además $\Delta x_i = \frac{1}{2}$. Luego las sumas inferior y superior son:

$$\begin{aligned} s(f,P) &= \sum_{i=1}^{2} m_i(f)\Delta x_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} f(x_i) = \frac{1}{2}\left(e^{-\frac{1}{4}} + e^{-1}\right) \\ S(f,P) &= \sum_{i=1}^{2} M_i(f)\Delta x_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} f(x_{i-1}) = \frac{1}{2}\left(e^{0} + e^{-\frac{1}{4}}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + e^{-\frac{1}{4}}\right) \end{aligned}$$

Recordemos que como son solo dos intervalos debido a la partición, $[0, \frac{1}{2}]$ *y* $[\frac{1}{2}, 1]$, *podemos evaluar las sumatorias directamente.*

Como $h(x) = -x^2$ y $g(x) = e^x$ son continuas $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (g \circ h)(x)$ también lo es, por lo que $f(x)$ es integrable y tiene sentido la integral que se pide colocar en la desigualdad. Se sigue finalmente que:

$$s(f,P) \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx \leq S(f,P)$$

$$\frac{1}{2}\left(e^{-\frac{1}{4}} + e^{-1}\right) \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx \leq \frac{1}{2}\left(1 + e^{-\frac{1}{4}}\right)$$

b) Usando la indicación, consideremos $P \in \mathcal{P}_{[a,b]},\ P = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ donde $x_i = aq^i$. Como $x_n = b$, se tiene

$$x_n = aq^n = b \Rightarrow q = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{1}{n}\ln\left(\frac{b}{a}\right)\right) = \exp\left(\frac{\lambda}{n}\right)$$

Donde se definió la constante $\lambda = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$ por comodidad en la escritura.
Como $f(x) = \frac{1}{x}$ es decreciente en $\mathbb{R}^+$, $M_i\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x_{i-1}}$ y $m_i\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x_i}$. Calculando las sumas:

$$\begin{aligned} s(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{aq^i}(aq^i - aq^{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{q}\right) = n - \frac{n}{q} \\ S(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_{i-1}}(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{aq^{i-1}}(aq^i - aq^{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}(q-1) = nq - n \end{aligned}$$

Sabemos que $f(x) = \frac{1}{x}$ es continua en $[a,b],\ 0 < a < b$, por lo que su integral existe y además cumple la desigualdad:

$$n - \frac{n}{q} \leq \int_a^b \frac{dx}{x} \leq nq - n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Y puesto que $q = \exp(\frac{\lambda}{n})$:

$$n - n\exp\left(\frac{-\lambda}{n}\right) \leq \int_a^b \frac{dx}{x} \leq n\exp\left(\frac{\lambda}{n}\right) - n \qquad (*)$$

Calculemos los siguientes límites:

$$
\begin{aligned}
&1. \quad \lim_{n\to\infty} n - n\exp\left(\frac{-\lambda}{n}\right) \qquad , \ u = \frac{\lambda}{n} \Rightarrow n = \frac{\lambda}{u}, \ u \to 0 \\
&= \quad \lim_{u\to 0} \frac{\lambda}{u} - \frac{\lambda}{u}e^{-u} = \lim_{u\to 0} \lambda \left(\frac{e^u - 1}{ue^u}\right) = \lambda \lim_{u\to 0} \left(\frac{e^u - 1}{u}\right) e^{-u} = \lambda \\
&2. \quad \lim_{n\to\infty} n\exp\left(\frac{\lambda}{n}\right) - n \qquad , \ u = \frac{\lambda}{n} \\
&= \quad \lim_{u\to 0} \frac{\lambda}{u}e^u - \frac{\lambda}{u} = \lim_{u\to 0} \lambda \left(\frac{e^u - 1}{u}\right) = \lambda
\end{aligned}
$$

Bajo el amparo del Teorema del Sandwich de sucesiones, y ya que en la desigualdad (*) los límites de los tres términos existen (note que el término central, es decir, la integral, es una constante), tenemos que:

$$\lambda \leq \int_a^b \frac{dx}{x} \leq \lambda$$

De donde se implica claramente que la integral es igual a λ. En otras palabras hemos demostrado que:

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \lambda = \ln\left(\frac{b}{a}\right) = \ln(b) - \ln(a).$$