SOLUCIÓN APUNTE MA1002
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL
SEMANA 4

Autor: Nicolás Igor Tapia Rivas

Use este material con responsabilidad.

P1.

a) Es condición del problema que $v = 1000\text{cm}^3 = 1$ litro. Además, observando la figura se concluye que:

$$v = axy \qquad s = 2(a+x)(a+y)$$

Es fácil despejar y de la expresión del volumen para obtener

$$s = 2(a+x)\left(a + \frac{v}{ax}\right)$$

b) Desarrollando la expresión de la superficie y derivando (recuerde que a no es variable):

$$\begin{aligned} s &= 2(a+x)\left(a+\frac{v}{ax}\right) = 2\left(a^2 + ax + \frac{v}{x} + \frac{v}{a}\right) \\ \frac{ds}{dx} &= 2\left(a - \frac{v}{x^2}\right) \end{aligned}$$

Esta derivada solo se anula si

$$x = \pm\sqrt{\frac{v}{a}}$$

Por lo que estos dos valores son candidatos a mínimo. Sabemos que la solución negativa no tiene sentido para el problema. Además, si derivamos por segunda vez obtenemos:

$$\frac{d^2s}{dx^2} = \frac{4v}{x^3}$$

Expresión que es positiva para $x = \sqrt{\frac{v}{a}}$. Luego por la proposición 2.2 concluimos que este valor de x es un mínimo.

c) Usando el resultado anterior, podemos escribir:

$$s = 2(a+x)\left(a+\frac{v}{ax}\right) = 2\left(a+\sqrt{\frac{v}{a}}\right)\left(a+\frac{v}{a}\sqrt{\frac{a}{v}}\right) = 2\left(a+\sqrt{\frac{v}{a}}\right)^2$$

Derivando esta expresión obtenemos:

$$\begin{aligned} s' &= 4\left(a+\sqrt{\frac{v}{a}}\right)\left(a+\sqrt{v}a^{-\frac{1}{2}}\right)' \\ &= 4\left(a+\sqrt{\frac{v}{a}}\right)\left(1-\frac{1}{2}\sqrt{v}a^{-\frac{3}{2}}\right) \end{aligned}$$

Dadas las condiciones físicas del problema $(a, x, y > 0)$, la única posibilidad de que esta derivada se anule es que

$$1 - \frac{1}{2}\sqrt{v}a^{-\frac{3}{2}} = 0 \Leftrightarrow a^3 = \frac{v}{4} \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{\frac{v}{4}}$$

Si calculamos la segunda derivada obtenemos que:

$$\begin{aligned} s'' &= 4\left(a + \sqrt{\frac{v}{a}}\right)'\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{v}a^{-\frac{3}{2}}\right) + 4\left(a + \sqrt{\frac{v}{a}}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{v}a^{-\frac{3}{2}}\right)' \\ &= 4\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{v}a^{-\frac{3}{2}}\right)^2 + 3\sqrt{v}a^{-\frac{5}{2}}\left(a + \sqrt{\frac{v}{a}}\right) \end{aligned}$$

Si evaluamos esta segunda derivada en $a = \sqrt[3]{\frac{v}{4}}$, sabemos que el primer término se anula y el segundo es siempre positivo, por lo que nuevamente por la proposición 2.2 concluimos que este valor de a es un mínimo. Finalmente los valores óptimos de a, x e y son:

$$a = \sqrt[3]{\frac{v}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2v}$$

$$x = \sqrt{\frac{v}{a}} = \sqrt{\frac{2v}{\sqrt[3]{2v}}} = \sqrt{\sqrt[3]{4v^2}} = \sqrt[3]{2v}$$

$$y = \frac{v}{ax} = \frac{v}{a}\sqrt{\frac{a}{v}} = \sqrt{\frac{v}{a}} = \sqrt[3]{2v}$$

Es interesante notar que la forma que minimiza la superficie es un paralelepípedo con un par de caras cuadradas y con las restantes caras de lado menor exactamente igual a la mitad del lado del cuadrado. Como $v = 1000\text{cm}^3 \Rightarrow \sqrt[3]{v} = 10\text{cm}$, se tiene de forma explícita que $a = 5\sqrt[3]{2}\text{cm}$ y $x = y = 10\sqrt[3]{2}\text{cm}$.

P2. Recordemos que una función f es convexa cuando $f'' > 0$.

I) Sea $h = \ln(f)$. Derivando obtenemos:

$$h' = \frac{f'}{f} \qquad h'' = \frac{ff'' - (f')^2}{f^2}$$

De donde se puede despejar f'' como:

$$f'' = \frac{h''f^2 + (f')^2}{f}$$

Como $f : [a, b] \to (0, \infty)$, se cumple que $f > 0$. Además, si f es log-convexa entonces $h'' > 0$ y por lo tanto $f'' > 0$. Es decir, f es convexa.
Un contraejemplo sencillo para la recíproca es $f(x) = x^2$. Vemos que f resulta ser convexa ya que $f''(x) = 2 > 0$, pero $h''(x) = -\frac{2}{x^2} < 0$ nos dice que no es log-convexa.

II) Consideremos la misma función h anterior y definamos $g = f^{\alpha}$, con $\alpha > 0$. Derivando g obtenemos:

$$\begin{aligned} g' &= \alpha f^{\alpha-1} f' \\ g'' &= \alpha(\alpha-1) f^{\alpha-2} (f')^2 + \alpha f^{\alpha-1} f'' \\ g'' &= \underbrace{\alpha^2 f^{\alpha} \left(\frac{f'}{f}\right)^2}_{>0} + \underbrace{\alpha f^{\alpha}}_{>0} \underbrace{\left(\frac{f''}{f} - \frac{(f')^2}{f^2}\right)}_{h''} \end{aligned}$$

Es claro que si f es log-convexa (es decir, $h'' > 0$), entonces $g'' > 0$ y por lo tanto f^{α} es convexa, para cualquier $\alpha > 0$. Para ver el caso recíproco, es decir, cuando se tiene que f^{α} es convexa para todo $\alpha > 0$ ($g'' > 0$), consideremos el siguiente despeje de la expresión anterior:

$$h'' = \frac{g'' - \alpha^2 f^{\alpha} \left(\frac{f'}{f}\right)^2}{\alpha f^{\alpha}} \tag{1}$$

Sabemos que el denominador es positivo puesto que $f > 0$ y $\alpha > 0$. Luego advertimos que:

$$f \text{ es log-convexa } \Leftrightarrow g'' > \alpha^2 f^{\alpha} \left(\frac{f'}{f}\right)^2 \tag{2}$$

La idea es aprovechar el hecho de que (1) será válido siempre para todo $\alpha > 0$. Por lo tanto, buscaremos elegir un α lo suficientemente pequeño que nos permita concluir la desigualdad que necesitamos.

Notemos que cuando $\alpha \to 0$, fijando x, tenemos que $\alpha^2 \to 0$ y $f^{\alpha} \to f^0 = 1$ (gracias a que $f \neq 0$). Luego

$$\lim_{\alpha \to 0} \alpha^2 f^{\alpha} \left(\frac{f'}{f}\right)^2 = 0$$

Esto significa por definición que:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall \alpha > 0,\ |\alpha - 0| < \delta \Rightarrow \left| \alpha^2 f^{\alpha} \left(\frac{f'}{f}\right)^2 - 0 \right| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ 0 < \alpha < \delta \Rightarrow \alpha^2 f^{\alpha} \left(\frac{f'}{f}\right)^2 < \varepsilon$$

Puesto que f^{α} es log-convexa, tenemos que $g'' > 0$. Usando la definición de límite, para $\varepsilon = g''$ existe $\delta > 0$ tal que:

$$\alpha^2 f^{\alpha} \left(\frac{f'}{f}\right)^2 < g''$$

Tomando cuaquier α en $(0, \delta)$ concluimos que f es log-convexa gracias a la proposición (2) obtenida de (1).

P3. $f(x) = (x+1)\ln\left(\left|\frac{x+1}{x}\right|\right)$, $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

a)
$$f(x) = (x+1)\ln\left(\left|\frac{x+1}{x}\right|\right) = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0 \vee \left|\frac{x+1}{x}\right| = 1$$

El primer caso nos entrega $x = -1$, pero para este valor el logaritmo se indefine. El segundo caso nos entrega:
$$\frac{x+1}{x} = 1 \vee \frac{x+1}{x} = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$
Luego el cero de la función es $x = -\frac{1}{2}$. Antes de ver los signos de la función, nos interesa saber cuándo la expresión dentro del logaritmo está por debajo y por encima de 1.

$$\begin{aligned} \left|\frac{x+1}{x}\right| < 1 \quad &\Leftrightarrow \quad -1 < \frac{x+1}{x} < 1 \\ &\Leftrightarrow \quad -1 < 1 + \frac{1}{x} < 1 \\ &\Leftrightarrow \quad -2 < \frac{1}{x} < 0 \end{aligned}$$

Para que lo último ocurra necesitamos que $x < 0$. Considerando esto podemos despejar x y obtener:

$$\left|\frac{x+1}{x}\right| < 1 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2}$$

Luego se cumple que:

	$(-\infty, -1)$	$(-1, -1/2)$	$(-1/2, 0)$	$(0, \infty)$
$\ln\left(\left\|\frac{x+1}{x}\right\|\right)$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$+$	$-$	$+$	$+$

b) Primero veamos las asíntotas horizontales (los límites hacia $-\infty$ y ∞).

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} (x+1)\ln\left(\left|1 + \frac{1}{x}\right|\right)$$

Cuando $x \to \infty$ podemos asumir que $x > 0$ y sacar simplemente el valor absoluto. Notemos que $x \to -\infty \Rightarrow \frac{1}{x} \to 0$. Por definición de límite esto significa particularmente que $\exists m < 0$ tal que $\forall x \leq m$ se tendrá necesariamente que $-1 < \frac{1}{x} < 1 \Rightarrow 0 < 1 + \frac{1}{x}$. Luego en el límite podemos deshacernos del valor absoluto de la misma forma hacia ambos infinitos.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\pm\infty} (x+1)\ln\left(\left|1 + \frac{1}{x}\right|\right) &= \lim_{x\to\pm\infty} (x+1)\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x+1}{x} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Es decir, posee asíntota horizontal $y = 1$ hacia ambos extremos.

Veamos ahora los límites hacia 0 y -1. Sabemos que:

$$x \to 0^+ \Rightarrow \frac{1}{x} \to +\infty \qquad x \to 0^- \Rightarrow \frac{1}{x} \to -\infty$$

Gracias al valor absoluto podemos afirmar que:

$$x \to 0 \Rightarrow \left|1 + \frac{1}{x}\right| \to +\infty$$

Puesto que $u \to \infty \Rightarrow \ln(u) \to \infty$, esto se traduce en que:

$$\lim_{x\to 0}(x+1)\ln\left(\left|1+\frac{1}{x}\right|\right) = +\infty$$

Es decir, existe una asíntota vertical en $x = 0$ hacia $+\infty$ por ambos lados. Por otro lado tenemos que:

$$\lim_{x\to -1^\pm}(x+1)\ln\left(\left|1+\frac{1}{x}\right|\right) = \lim_{x\to -1^\pm}\frac{\ln\left(\left|1+\frac{1}{x}\right|\right)}{\frac{1}{x+1}}$$

Sabemos que $u \to 0^+ \Rightarrow \ln(u) \to -\infty$, por lo que:

$$x \to -1 \Rightarrow \left|1+\frac{1}{x}\right| \to 0^+ \Rightarrow \ln\left(\left|1+\frac{1}{x}\right|\right) \to -\infty$$

Y además $x \to -1^\pm \Rightarrow (x+1) \to 0^\pm \Rightarrow \frac{1}{x+1} \to \pm\infty$. Puesto que tanto por la izquierda como por la derecha tenemos una indefinición ∞/∞, podemos analizar ambos casos simultáneamente utilizando la regla de L'Hôpital. Recordemos que $\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x}$. Veamos entonces el límite de las derivadas:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -1^\pm}\frac{\left(\ln\left(\left|\frac{x+1}{x}\right|\right)\right)'}{\left(\frac{1}{x+1}\right)'} &= \lim_{x\to -1^\pm}\frac{\frac{x}{x+1}\left(1+\frac{1}{x}\right)'}{-\frac{1}{(x+1)^2}} \\
&= \lim_{x\to -1^\pm}\frac{\frac{x}{x+1}\frac{-1}{x^2}}{-\frac{1}{(x+1)^2}} \\
&= \lim_{x\to -1^\pm}\frac{x(x+1)^2}{x^2(x+1)} = \lim_{x\to -1^\pm}\frac{x+1}{x} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Puesto que el límite de las derivadas existe, por la regla de L'Hôpital concluimos que:

$$\lim_{x\to -1} f(x) = 0$$

Podemos reparar esta función para que sea continua en $x = -1$ definiendo $f(-1) = 0$.

c) $g(x) = \ln|x|$. Esta función es diferenciable en $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, por lo que será diferenciable en intervalos que no contengan al cero. Si queremos intervalos de la forma $[x, x+1]$, necesitamos que $x \notin [-1, 0]$. Podemos usar el TVM entonces en $[x, x+1]$ para obtener que existe $c \in [x, x+1]$ tal que:

$$g'(c) = \frac{g(x+1)-g(x)}{(x+1)-x} \Leftrightarrow \frac{1}{c} = \ln\left(\left|\frac{x+1}{x}\right|\right) \Leftrightarrow \frac{1}{c} = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

Lo último gracias a que $\frac{x+1}{x} > 0$ cuando $x \notin [-1, 0]$. Luego, gracias al decrecimiento estricto de $\frac{1}{x}$, tenemos que $\frac{1}{x+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}$. Se concluye que:

$$\frac{1}{x+1} < \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) < \frac{1}{x},\ \forall x \in (-\infty,-1)\cup(0,\infty)$$

d) Calculemos f'.

$$\begin{aligned}
f(x) &= (x+1)\ln\left(\left|1+\frac{1}{x}\right|\right) \\
f'(x) &= (x+1)'\ln\left(\left|1+\frac{1}{x}\right|\right) + (x+1)\left(\ln\left(\left|1+\frac{1}{x}\right|\right)\right)' \\
f'(x) &= \ln\left(\left|1+\frac{1}{x}\right|\right) + (x+1)\frac{x}{x+1}\frac{-1}{x^2} \\
f'(x) &= \ln\left(\left|1+\frac{1}{x}\right|\right) - \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

e) En $(-\infty,-1)\cup(0,\infty)$, $f'(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}$. Como se cumple que:

$$\frac{1}{x+1} < \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) < \frac{1}{x} \Rightarrow \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x} < 0$$

Tenemos que $f'(x)<0$ en $(-\infty,-1)\cup(0,\infty)$, es decir, estrictamente decreciente.

f) Calculemos f''.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \ln\left|1+\frac{1}{x}\right| - \frac{1}{x} \\
f''(x) &= \frac{x}{x+1}\frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x^2} \\
&= \frac{1}{x^2(x+1)}
\end{aligned}$$

Observamos de inmediato que el signo de f'' depende del signo de $(x+1)$. Entonces:

$$\begin{array}{ccccccc}
x\in(-\infty,-1) & \Rightarrow & (x+1)<0 & \Rightarrow & f''(x)<0 & \Rightarrow & \text{Cóncava } \cap \\
x\in(-1,\infty) & \Rightarrow & (x+1)>0 & \Rightarrow & f''(x)>0 & \Rightarrow & \text{Convexa } \cup
\end{array}$$

g) Veamos en primer lugar que:

$$\lim_{x\to-1^+}\ln\left|1+\frac{1}{x}\right| = -\infty \qquad \lim_{x\to-1^+} -\frac{1}{x} = 1$$
$$\lim_{x\to0^-}\ln\left|1+\frac{1}{x}\right| = +\infty \qquad \lim_{x\to0^-} -\frac{1}{x} = +\infty$$

El álgebra de límites nos permite concluir que:

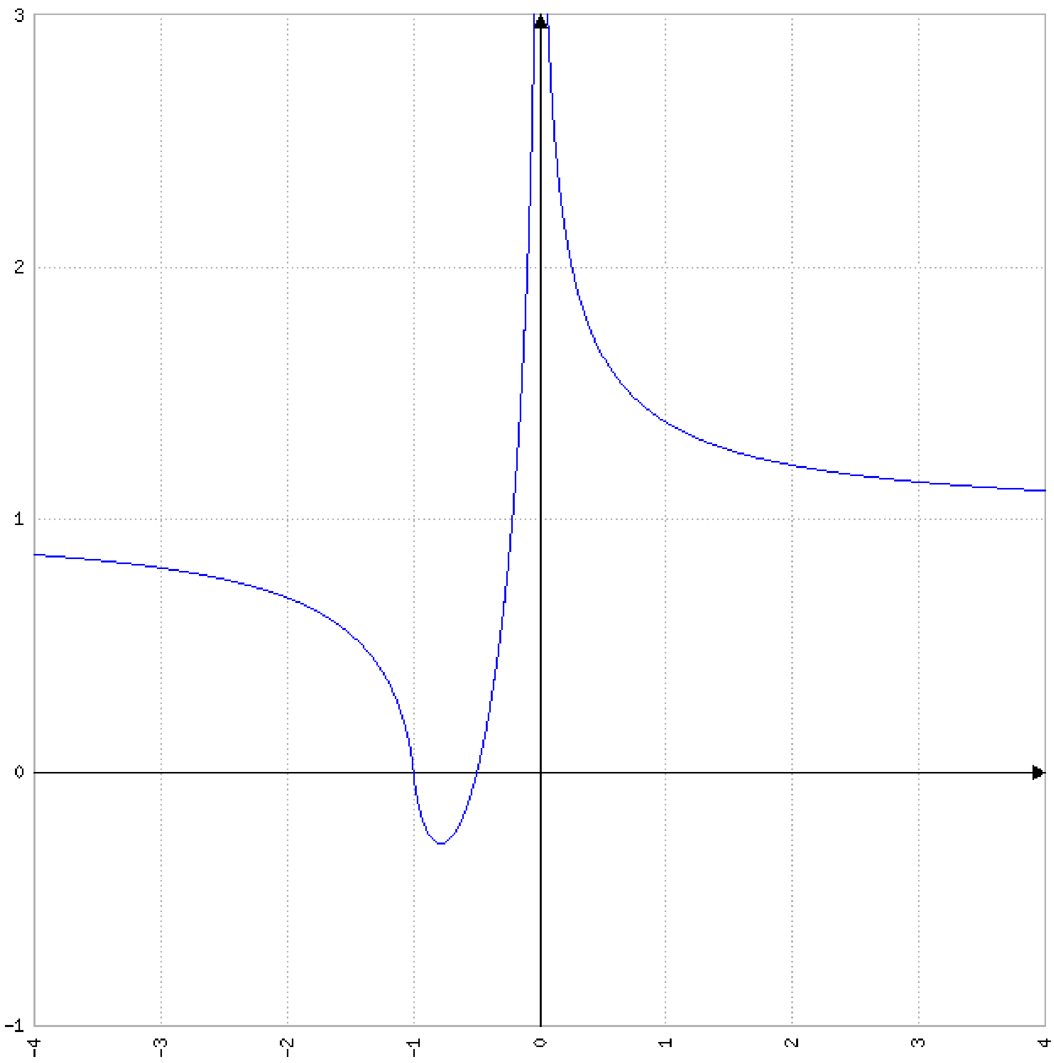
$$\lim_{x\to-1^+} f'(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to0^-} f'(x) = +\infty$$

De la parte anterior sabemos que $f''>0$ en $(-1,\infty)$, por lo que en $(-1,0)$ f' es estrictamente creciente. Debido a los límites calculados recientemente, sabemos que cerca de -1 la derivada es negativa, y cerca de 0 la derivada es positiva.
Podemos aplicar el TVI en algún intervalo $[a,b]\subset(-1,0)$ donde $f'(a)<0$ y $f'(b)>0$ para concluir que existe $x_0\in(-1,0)$ tal que $f'(x_0)=0$. Si existieran dos ceros distintos x_1 y x_2 con $x_1<x_2$, entonces aplicando el TVM en $[x_1,x_2]$ llegamos a que existe $c\in(x_1,x_2)$ tal que:

$$f''(c)(x_2-x_1) = f'(x_2)-f'(x_1) = 0 \Rightarrow f''(c)=0$$

Lo que es una contradicción puesto que $f'' > 0$ en este intervalo. En definitiva existe un único cero de f', y por lo tanto un único cambio de signo. Todo esto significa que la función f en un principio decrece estrictamente ($f' < 0$) hasta alcanzar un mínimo local (donde f' se anula), cuya naturaleza de mínimo es justificable gracias a que $f'' > 0$. Después de alcanzar este mínimo la función crece estrictamente ($f' > 0$).

h) Aquí se debe bosquejar la función con toda la información reunida pero simplemente adjuntaré una gráfica de la función.



P4.

a) Tenemos que x: cobre corriente, y: cobre fino. Sabemos además que, siendo p el precio de venta del cobre corriente:

$$x + y \leq 9 \qquad y = \frac{40 - 5x}{10 - x} \qquad I = 3,6py + px \Rightarrow \frac{I}{p} = 3,6y + x$$

Para maximizar el ingreso, maximizaremos I/p. Reemplazando y en la expresión, obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{I}{p} &= 3,6 \cdot \frac{40 - 5x}{10 - x} + x \\ \left(\frac{I}{p}\right)' &= 3,6 \cdot \frac{(40 - 5x)'(10 - x) - (40 - 5x)(10 - x)'}{(10 - x)^2} + 1 \\ \left(\frac{I}{p}\right)' &= \frac{-36}{(10 - x)^2} + 1 \end{aligned}$$

Esta derivada se anulará si:

$$\frac{-36}{(10 - x)^2} + 1 = 0 \Leftrightarrow (10 - x)^2 - 6^2 = 0 \Leftrightarrow (16 - x)(4 - x) = 0$$

Debido a la restricción de capacidad instalada, la solución $x = 16$ queda descartada. Una candidata para máximo es la solución $x = 4$. Al derivar nuevamente obtenemos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{I}{p}\right)' &= -36(10 - x)^{-2} + 1 \\ \left(\frac{I}{p}\right)'' &= -36 \cdot (-2)(10 - x)^{-3}(10 - x)' \\ \left(\frac{I}{p}\right)'' &= -72(10 - x)^{-3} \end{aligned}$$

Donde la segunda derivada es negativa cuando $x = 4$. Luego este valor es un máximo. La producción de cobre fino correspondiente es:

$$y = \frac{40 - 5 \cdot 4}{10 - 4} = \frac{10}{3}$$

Por lo que la producción diaria es de $7,\overline{3}$ toneladas.

b) Puesto que la función f es continua y diferenciable en $(0, x)$, con $x \in \mathbb{R}^+$, podemos ocupar el TVM para obtener que existe $c \in (0, x)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x}$$

Puesto que f' es creciente en $\mathbb{R}^+$, se cumple que $f'(c) < f'(x)$. De aquí concluimos que $f'(x) > \frac{f(x)}{x}$. Si tomamos la función $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ y la derivamos, obtenemos:

$$g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{1}{x}\left(f'(x) - \frac{f(x)}{x}\right)$$

Puesto que $x > 0$ y $f'(x) > \frac{f(x)}{x}$ gracias a lo demostrado anteriormente, concluimos que $g'(x) > 0$, esto es, $g(x)$ es creciente.

P5.

a) Esta parte es aplicación directa de las propiedades de derivación. Para estudiar la monotonía será conveniente calcular $f'(x)$. Antes de ello calculemos la derivada de la función $\arctan(x)$. Para ello, usaremos la derivación de una función inversa. Derivando primero la tangente:

$$\tan'(x) = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \sec^2(x) = 1 + \tan^2(x)$$

Lo último se obtiene simplemente usando la identidad $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ y dividiendo por $\cos^2(x)$. Derivando ahora la arcotangente:

$$\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + x^2}$$

Ahora procederemos a derivar f.

$$\begin{aligned}
f(x) &= g(b - ax^3) \cdot h(\arctan(cx)) \\
f'(x) &= (g(b - ax^3))' \cdot h(\arctan(cx)) + g(b - ax^3) \cdot (h(\arctan(cx)))' \\
f'(x) &= g'(b - ax^3) \cdot (b - ax^3)' \cdot h(\arctan(cx)) + g(b - ax^3) \cdot h'(\arctan(cx)) \cdot (\arctan(cx))' \\
f'(x) &= g'(b - ax^3) \cdot (-3ax^2) \cdot h(\arctan(cx)) + g(b - ax^3) \cdot h'(\arctan(cx)) \cdot \arctan'(cx) \cdot (cx)' \\
f'(x) &= -3ax^2 g'(b - ax^3) h(\arctan(cx)) + g(b - ax^3) h'(\arctan(cx)) \frac{c}{1 + (cx)^2}
\end{aligned}$$

Sabemos por el enunciado que $g < 0$ y $h > 0$. Además las funciones son crecientes, por lo que $g' \geq 0$ y $h' \geq 0$. Sabemos también que $a, b, c > 0$. Luego tenemos término a término:

$$\begin{aligned}
-3ax^2 &< 0 \\
g'(b - ax^3) &\geq 0 \\
h(\arctan(cx)) &> 0 \\
g(b - ax^3) &< 0 \\
h'(\arctan(cx)) &\geq 0 \\
\frac{c}{1 + (cx)^2} &> 0
\end{aligned}$$

Es directo entonces que $f'(x) \leq 0$, es decir, la función es decreciente.

b) Separando las desigualdades y recordando que $x > 0$, podemos ver que:

$$\begin{aligned}
1 + \ln(x) < (x+1)\ln(x+1) - x\ln(x) &\Leftrightarrow 1 < (x+1)(\ln(x+1) - \ln(x)) \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) \\
(x+1)\ln(x+1) - x\ln(x) < 1 + \ln(x+1) &\Leftrightarrow x(\ln(x+1) - \ln(x)) < 1 \\
&\Leftrightarrow \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

Por lo tanto lo que nos piden demostrar es equivalente a que:

$$\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}$$

Esto sugiere el uso del TVM en la función $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ con $f(x) = \ln(x)$, cuya derivada vale $f'(x) = \frac{1}{x}$. Gracias a la continuidad y diferenciabilidad de $f(x) = \ln(x)$ en $(0, \infty)$, podemos aplicar el TVM en un intervalo $[x, x + 1]$ con $x \in (0, \infty)$. Luego tenemos que existe $c \in (x, x + 1)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(x+1) - f(x)}{(x+1) - x} \Leftrightarrow \frac{1}{c} = \ln(x+1) - \ln(x)$$

Y debido al decrecimiento estricto de la función $1/x$ y ya que $c \in (x, x + 1)$, se cumple que:

$$\frac{1}{x+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}$$

Uniendo ambos resultados concluimos que:

$$\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}$$

Que ya vimos que era equivalente a lo que nos pedían demostrar.

Una forma algo más directa era considerar inmediatamente la función $f(x) = x\ln(x)$ cuya derivada vale $f'(x) = 1 + \ln(x)$. Aplicando el TVM en el mismo intervalo $[x, x + 1]$ llegamos a que:

$$1 + \ln(c) = (x+1)\ln(x+1) - x\ln(x)$$

Utilizando el crecimiento de la función $1 + \ln(x)$ se concluye el resultado.

c) De la parte anterior tenemos que se cumple:

$$1 + \ln(k) < (k+1)\ln(k+1) - k\ln(k) < 1 + \ln(k+1),\ k \in \mathbb{N}$$

Tengamos en cuenta que $\ln(1) = 0$, por lo que su presencia en sumas es indiferente (se puede agregar o quitar sin ningún problema).
Si hacemos la sumatoria desde 1 hasta n en la primera desigualdad obtenemos:

$$\begin{aligned}
&\sum_1^n 1 + \ln(k) < \sum_1^n (k+1)\ln(k+1) - k\ln(k) \\
\Leftrightarrow\ & n + \sum_1^n \ln(k) < (n+1)\ln(n+1) - \ln(1) \\
\Leftrightarrow\ & \sum_1^n \ln(k) < (n+1)\ln(n+1) - n
\end{aligned}$$

Si hacemos ahora la sumatoria desde 1 hasta $n-1$ en la segunda desigualdad obtenemos:

$$
\begin{aligned}
& \sum_{1}^{n-1}(k+1)\ln(k+1) - k\ln(k) < \sum_{1}^{n-1} 1 + \ln(k+1) \\
\Leftrightarrow\quad & n\ln(n) - \ln(1) < (n-1) + \sum_{1}^{n-1} \ln(k+1) \\
\Leftrightarrow\quad & n\ln(n) - (n-1) < \sum_{2}^{n} \ln(k) = \sum_{1}^{n} \ln(k)
\end{aligned}
$$

Uniendo ambos resultados concluimos que:

$$
n\ln(n) - (n-1) < \sum_{1}^{n} \ln(k) < (n+1)\ln(n+1) - n
$$