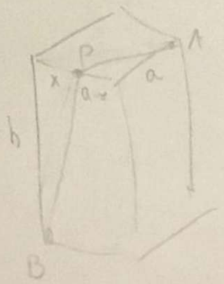
P1)



$$d = AP + BP$$

$$AP = \sqrt{a^2 + (a-x)^2}$$

$$BP = \sqrt{x^2 + h^2}$$

$$\Rightarrow d(x) = \sqrt{a^2+(a-x)^2} + \sqrt{x^2+h^2}$$

para encontrar la distancia mínima debemos encontrar $\bar{x}$ tal que $d'(\bar{x}) = 0$

$$d'(x) = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{a^2+(a-x)^2}} \cdot \cancel{2}(a-x) \cdot -1 + \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2+h^2}} \cdot \cancel{2}x$$

$$= \frac{-(a-x)}{\sqrt{a^2+(a-x)^2}} + \frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a-x}{\sqrt{a^2+(a-x)^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}} \quad \Leftrightarrow \quad (a-x)\sqrt{x^2+h^2} = x\sqrt{a^2+(a-x)^2} \quad /()^2$$

$$\Rightarrow (a-x)^2(x^2+h^2) = x^2(a^2+(a-x)^2)$$

$$\Leftrightarrow \cancel{(a-x)^2 x^2} + (a-x)^2 h^2 = a^2x^2 + \cancel{x^2(a-x)^2}$$

$$\Leftrightarrow (a-x)^2 h^2 = a^2 x^2 \quad /\sqrt{\ }$$

$$\Rightarrow ax = \pm (a-x)h$$

pero $x > 0$, $h > 0$ y $a > 0$, entonces la única opción es $ax = (a-x)h$ porque $0 \leq x \leq a$.

$$\Rightarrow ax = (a-x)h$$

$$\Leftrightarrow ax = ah - xh$$

$$\Leftrightarrow x(a+h) = ah$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{ah}{a+h}$$

veamos que efectivamente es un mínimo $\left(d''(\bar{x}) > 0\right)$

$$d''(x) = -\left[-1 \cdot \sqrt{a^2+(a-x)^2} - \frac{(a-x)\cdot 1}{\cancel{2}\sqrt{a^2+(a-x)^2}} \cdot \cancel{2}(a-x) \cdot -1 \right] \cdot \frac{1}{a^2+(a-x)^2}$$

$$+ \left[\sqrt{x^2+h^2} - \frac{x \cdot 1}{\cancel{2}\sqrt{x^2+h^2}} \cdot \cancel{2}x \right] \cdot \frac{1}{x^2+h^2}$$

$$= \left[\sqrt{a^2+(a-x)^2} - \frac{(a-x)^2}{\sqrt{a^2+(a-x)^2}} \right] \cdot \frac{1}{a^2+(a-x)^2} + \left[\sqrt{x^2+h^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+h^2}} \right] \cdot \frac{1}{x^2+h^2}$$

$$= \frac{a^2 + \cancel{(a-x)^2} - \cancel{(a-x)^2}}{\sqrt{a^2+(a-x)^2}} \cdot \frac{1}{a^2+(a-x)^2} + \frac{\cancel{x^2} + h^2 - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+h^2}} \cdot \frac{1}{x^2+h^2}$$

$$= \frac{a^2}{(a^2+(a-x)^2)^{3/2}} + \frac{h^2}{(x^2+h^2)^{3/2}} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

en particular $d''(\bar{x}) > 0$

$\therefore$ $\bar{x} = \frac{ah}{a+h}$ es la posición de P que minimiza la distancia.

P2) $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ $(a_n) \subseteq [a,b]$

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = l$$

P.D.Q $\exists x_0 \in [a,b]$ tal que $f(x_0) = l$

En efecto: como $(a_n) \subseteq [a,b]$, es una sucesión acotada

$\Rightarrow$ por B.W $\exists a_{n_k}$ convergente

Sea $(a_n)_k \to x_0$

como f es continua $f(a_{n_k}) \to f(x_0)$

pero $f(a_{n_k})$ es una subsucesión de $f(a_n)$ y

por lo tanto $f(a_{n_k}) \to l$

$\therefore$ por unicidad del límite $f(x_0) = l$ //.

P3) $f(x) = |x|^3 = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \geq 0 \\ -x^3 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

veamos que existe f'

si $x > 0$, $f' = 3x^2$

si $x < 0$, $f' = -3x^2$

para $x = 0$, tenemos que tomar límites por la derecha y por la izquierda

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h^3}{h} = \lim_{h \to 0^+} h^2 = 0$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h^3}{h} = \lim_{h \to 0^-} -h^2 = 0$$

$\therefore f'(0) = 0 \Rightarrow f'(x)$ existe $\forall x \in \mathbb{R}$

veamos que existe f''

si $x > 0$, $f'' = 6x$

si $x < 0$, $f'' = -6x$

para $x = 0$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f'(0+h) - f'(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f'(h)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{3h^2}{h} = \lim_{h \to 0^+} 3h = 0$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f'(0+h) - f'(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f'(h)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-3h^2}{h} = \lim_{h \to 0^-} -3h = 0$$

$\therefore f''(0) = 0 \Rightarrow f''(x)$ existe $\forall x \in \mathbb{R}$

ahora veamos que $f'''(0)$ no existe

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f''(0+h) - f''(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{6h}{h} = \lim_{h \to 0^+} 6 = 6$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f''(0+h) - f''(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-6h}{h} = -6$$

$\therefore f'''(0)$ no existe //

P4) f diferenciable, $f(x)\cos(x) \geq 0$

a) f diferenciable $\Rightarrow$ f continua

como $f(x)\cdot\cos(x) \geq 0$, $f(x) \geq 0$ si $\cos(x) \geq 0$ y

$f(x) \leq 0$ si $\cos(x) \leq 0$

$\therefore$ si $x_1 \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ $f(x) \geq 0$

si $x_2 \in \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$ $f(x) \leq 0$ $\forall k \in \mathbb{Z}$

como f es continua por TVI, $\exists x_0 \in (x_1, x_2)$ tal que $f(x_0) = 0$.

Pero hay infinitos x_1 y x_2 y por lo tanto infinitos x_0

$\therefore f(x)$ tiene infinitos ceros

b) P.D.Q f' tiene infinitos ceros

ya sabemos que f tiene infinitos ceros

sea (x_n) la sucesión de los ceros de f ordenados.

sea x_i, x_{i+1} dos ceros consecutivos $(x_i \neq x_{i+1})$

como f es continua, por TVM

$$\frac{\cancelto{0}{f(x_i)} - \cancelto{0}{f(x_{i+1})}}{x_i - x_{i+1}} = f'(\xi) \quad \xi \in (x_i, x_{i+1})$$

$\therefore \exists \xi \in (x_i, x_{i+1})$ tal que $f'(\xi) = 0$

Pero como existen infinitos x_i, x_{i+1}, existen infinitos ξ

$\therefore f'$ tiene infinitos ceros

5) a) f continua en I, derivable en $Int(I)$, $|f'(x)| \leq 2 \quad \forall x \in Int(I)$

P.D.Q $\exists L > 0 \quad \forall x_1, x_2 \in I \qquad |f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$

Sea $x_1, x_2 \in I$, f será derivable en $Int(I)$. y continua en I

Por TVM

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = f'(\xi)$$

$$\Leftrightarrow \quad f(x_1) - f(x_2) = f'(\xi)(x_1 - x_2)$$

$$\Rightarrow \quad |f(x_1) - f(x_2)| = |f'(\xi)||x_1 - x_2| \leq 2|x_1 - x_2|$$

$\therefore$ Basta tomar $L = 2$ y f es Lipchitz

b) P.D.Q: Lipchitz $\Rightarrow$ continua

Sea $(x_n) \subseteq I \qquad x_n \to x_0$

P.D.Q $f(x_n) \to f(x_0)$

como f es Lipchitz

$$\exists L \quad 0 \leq |f(x_n) - f(x_0)| \leq L|x_n - x_0| \quad / \lim_{n \to \infty}$$

$$0 \leq |f(x_n) - f(x_0)| \leq 0$$

$$0$$

Por sandwitch, $|f(x_n) - f(x_0)| \to 0$

$\Leftrightarrow f(x_n) \to f(x_0)$ //

$\therefore$ f Lipchitz $\Rightarrow$ f continua

c) P.D.Q Lipchitz $\Rightarrow$ uniformemente continua

P.D.Q $\forall x_1, x_2 \in I$ $\forall \varepsilon > 0$ $\delta > 0$ tq' $|x_1 - x_2| \leq \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

Sabemos que $|f(x_1) - f(x_2)| \leq L\,|x_1 - x_2|$

Entonces basta tomar $\delta = \dfrac{\varepsilon}{L}$

con lo que

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L\,|x_1 - x_2| \leq L \cdot \delta = \cancel{L} \cdot \frac{\varepsilon}{\cancel{L}}$$

$$\Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| \leq \varepsilon$$

$\therefore$ f es uniformemente continua //

d) P.D.Q uniformemente continua $\Rightarrow$ continua

unif. continua: $\forall x_1, x_2$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ $|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

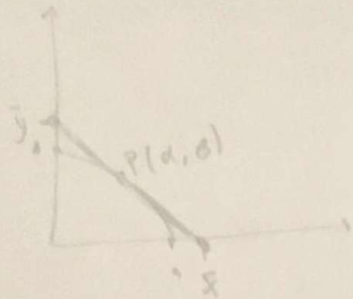
continua en $\bar{x}$: $\forall x$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ $|x - \bar{x}| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\bar{x})| \leq \varepsilon$

entonces la continuidad uniforme nos dice que algo se cumple $\forall x_1, x_2$ mientras que la continuidad nos dice que se cumple $\forall x$ con un $\bar{x}$ fijo.

Pero como en la continuidad uniforme se cumple $\forall x_1, x_2$, en particular se cumple $\forall x$ con un $\bar{x}$ fijo

$\therefore$ Basta con fijar un elemento en la continuidad uniforme y vemos que f es continua.

P6)



recta tangente en (α,β)

$$(y-\beta) = y'(\alpha)\,(x-\alpha)$$

pendiente = derivada en ese punto

$$\Leftrightarrow \quad (y-\beta) = -2\alpha\,(x-\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \quad y = \beta - 2\alpha x + 2\alpha^2$$

intersección con OY , $x=0$

$$\Rightarrow \quad \bar{y} = \beta + 2\alpha^2$$

intersección con OX , $y=0$

$$0 = \beta - 2\alpha x + 2\alpha^2$$

$$\Rightarrow \quad \bar{x} = \frac{2\alpha^2+\beta}{2\alpha}$$

$$\therefore \quad A(\alpha,\beta) = \left(\frac{2\alpha^2+\beta}{2\alpha}\right)\cdot\left(\beta+2\alpha^2\right)\cdot\frac{1}{2}$$

pero

$\beta = 1-\alpha^2$ (pq' P pertence a la parábola)

$$\Rightarrow A(\alpha) = \left(\frac{2\alpha^2+1-\alpha^2}{2\alpha}\right)\cdot\left(1-\alpha^2+2\alpha^2\right)\cdot\frac{1}{2}$$

$$= \left(\frac{\alpha^2+1}{2\alpha}\right)\cdot\left(\alpha^2+1\right)\cdot\frac{1}{2}$$

$$A(\alpha) = \frac{(\alpha^2+1)^2}{4\alpha}$$

minimicemos : $A'(\alpha) = \dfrac{2(\alpha^2+1)\cdot 2\alpha\cdot 4\alpha - 4(\alpha^2+1)^2}{16\alpha^2} = \dfrac{\cancel{16}^{4}\alpha^2(\alpha^2+1) - \cancel{4}(\alpha^2+1)}{4\cancel{16}\alpha^2}$

$= \dfrac{(\alpha^2+1)(4\alpha^2-1)}{4\alpha^2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$ pero como está en el primer cuadrante $\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\beta = 1 - \alpha^2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow P = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{3} \right)$

Teníamos que $A'(\alpha) = \dfrac{\overbrace{(\alpha^2+1)}^{\geq 0}(4\alpha^2-1)}{\underbrace{4\alpha^2}_{\geq 0}}$

el signo de $A'(\alpha)$ depende sólo de $(4\alpha^2 - 1)$

es claro que si $\alpha \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ $A'(\alpha) \leq 0 \Rightarrow A$ decreciente y

si $\alpha \in \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right)$ $A'(\alpha) \geq 0 \Rightarrow A$ creciente

$\therefore P = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{3} \right)$ es el punto que minimiza el área

$A_{min} = \dfrac{\left(\frac{1}{3}+1\right)^2}{\frac{4}{\sqrt{3}}} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\cancel{16}^{4}}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cancel{4}} = \frac{4\sqrt{3}}{9}$ //

P7 a) $\lim_{h\to 0} \frac{f(\bar{x}+h) - 2f(\bar{x}) + f(\bar{x}-h)}{h^2} \overset{L'H}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f'(\bar{x}+h) - f'(\bar{x}-h)}{2h}$

$\overset{L'H}{\rightarrow} = \lim_{h\to 0} \frac{f''(\bar{x}+h) + f''(\bar{x}-h)}{\cancel{2}} = \frac{\cancel{2} f''(\bar{x})}{\cancel{2}} = f''(\bar{x})$ //

b) no podemos hacer eso porque $f''(\bar{x}+h)$ no existe.

podemos llegar hasta $= \lim_{h\to 0} \frac{f'(\bar{x}+h) - f'(\bar{x}-h)}{2h}$

$= \frac{1}{2} \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{f'(\bar{x}+h) - f(\bar{x})}{h}}_{f''(\bar{x})} + \underbrace{\frac{f(\bar{x}) - f(\bar{x}-h)}{h}}_{f''(\bar{x})}$

$= \frac{1}{2} \, 2 f''(\bar{x}) = f''(\bar{x})$ //