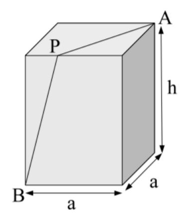
MA1002-7 Cálculo Diferencial e Integral
Profesores: Emilio Vilches
Auxiliares: Ilana Mergudich - Ignacio Riego
Fecha: Jueves 13 de Octubre

Auxiliar Extra: Control 1

P1. Considere una caja de base cuadrada de lado a y altura h. Un insecto está localizado en el vértice A y debe llegar al vértice B caminando en línea recta desde A hasta P por la tapa de la caja y de igual forma se desplaza desde P hasta B por la cara frontal.
Determine la posición del punto P de manera de minimizar la distancia total recorrida.



P2. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua y sea (a_n) una sucesión en $[a, b]$ (no necesariamente convergente) tal que $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \ell$. Demuestre que existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = \ell$.

P3. Demuestre que la función $f(x) = |x|^3$ tiene primera y segunda derivada $\forall x \in \mathbb{R}$, pero f''' no existe para $x = 0$.

P4. Sea f una función diferenciable en los reales, tal que $f(x)\cos(x) \geq 0$.

a) Demuestre que f tiene infinitos ceros en $\mathbb{R}$.

b) Demuestre que la derivada de f también tiene un número infinito de ceros.

P5. Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida en el intervalo I.

a) Demuestre que si f es continua en I, derivable en $\text{Int}(I)$ y $\forall x \in \text{Int}(I), |f'(x)| \leq 2$, entonces f es Lipchitziana en I, es decir,

$$\exists L > 0, \forall x_1, x_2 \in I \quad |f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|.$$

b) Demuestre que si f es Lipchitziana en I (no necesariamente derivable), entonces f es continua en I.

c) Demuestre que si f es Lipchitziana en I (no necesariamente derivable), entonces f es uniformemente continua en I.

d) Demuestre que si f es uniformemente continua en I, entonces f es continua en I.

P6. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la parábola $y = 1 - x^2$, en el primer cuadrante $(x, y > 0)$, tal que ella forme con los ejes coordenados un triángulo rectángulo de la menos área posible. Calcule el área mínima.

P7. *a)* Demuestre que si $f''(x)$ existe $\forall x \in (\overline{x} - \delta, \overline{x} + \delta)$, $\delta > 0$ y f'' es continua en $\overline{x}$, entonces

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\overline{x} + h) - 2f(\overline{x}) + f(\overline{x} - h)}{h^2} = f''(x)$$

Indicación: Use L'Hôpital dos veces.

b) Demuestre que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(\overline{x} + h) - 2f(\overline{x}) + f(\overline{x} - h)}{h^2} = f''(x)$ existe incluso si $f''(x)$ existe solamente en $\overline{x}$.