

P1 a) Recordemos el Teorema de la Función Inversa:

Para $f: (a,b) \rightarrow (c,d)$ biyectiva y continua, si f es derivable en $\bar{x} \in (a,b)$ con $f'(\bar{x}) \neq 0$, entonces la función inversa $f^{-1}: (c,d) \rightarrow (a,b)$ es derivable en $\bar{y} = f(\bar{x})$ con

$$(f^{-1})'(\bar{y}) = \frac{1}{f'(\bar{x})} = \frac{1}{f'(f^{-1}(\bar{y}))}$$

Recordemos también que $\arcsen: [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$, por lo que la inversa del $\arcsen$ es $\sen(x)$ definido en $[-\pi/2, \pi/2]$. En este intervalo $\sen(x)$ es biyectiva y continua. Además es derivable en todo su dominio y $(\sen(x))' \neq 0 \quad \forall x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Por lo tanto, por Teorema de la Función Inversa se tiene que

$$(\arcsen(x))' = \frac{1}{\underbrace{(\sen(y))'}_{\rightarrow \cos(y)}} = \frac{1}{\cos(\arcsen(x))}$$

Recordemos que $\sen^2(a) + \cos^2(a) = 1 \Rightarrow \cos(a) = \sqrt{1 - \sen^2(a)}$

$$\Rightarrow \cos(\arcsen(x)) = \sqrt{1 - \sen^2(\arcsen(x))} = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\therefore (\arcsen(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

b) $\arctan: \mathbb{R} \rightarrow (-\pi/2, \pi/2)$ por lo que su inversa es $\tan: (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}$.
En este intervalo la tangente es biyectiva, continua y derivable,
 $(\tan(x))' = \sec^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \neq 0 \quad \forall x \in (-\pi/2, \pi/2)$

Entonces podemos usar el teorema de la función inversa y tenemos que

$$(\arctan(x))' = \frac{1}{\tan'(y)} = \frac{1}{\sec^2(y)} = \frac{1}{\sec^2(\arctan(x))}$$

Recordemos que $1 + \tan^2(a) = \sec^2(a)$

$$\Rightarrow \sec^2(\arctan(x)) = 1 + \tan^2(\arctan(x)) \\ = 1 + x^2$$

$$\therefore (\arctan(x))' = \frac{1}{1 + x^2}$$

c) Recordemos la regla de la cadena:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Tenemos que derivar $\frac{1}{a^2+x^2}$

Podemos ver que esto es la composición de dos funciones.

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad g(x) = a^2 + x^2$$

$$\Rightarrow f(g(x)) = \frac{1}{a^2+x^2}$$

entonces por regla de la cadena:

$$\left(\frac{1}{a^2+x^2}\right)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow f'(g(x)) = f'(a^2+x^2) = \frac{-1}{(a^2+x^2)^2}$$

$$g(x) = a^2+x^2 \Rightarrow g'(x) = 2x$$

$$\therefore \left(\frac{1}{a^2+x^2}\right)' = \frac{-1}{(a^2+x^2)^2} \cdot 2x = \frac{2x}{(a^2+x^2)^2}$$

d) queremos derivar $e^{\frac{1}{\ln(x)}}$. Nuevamente podemos ver esto como la

composición de dos funciones: $f(x) = e^x$

$$g(x) = \frac{1}{\ln(x)}$$

$$f(g(x)) = e^{\frac{1}{\ln(x)}}$$

Por regla de la cadena:

$$\left(e^{\frac{1}{\ln(x)}}\right)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x \Rightarrow f'(g(x)) = f'\left(\frac{1}{\ln(x)}\right) = e^{\frac{1}{\ln(x)}}$$

$$g(x) = \frac{1}{\ln(x)}$$

Para derivar esto también usaremos regla de la cadena.

$$\text{Sea } h(x) = \frac{1}{x} \text{ y } k(x) = \ln(x)$$

$$h(k(x)) = \frac{1}{\ln(x)} \Rightarrow \left(\frac{1}{\ln(x)}\right)' = h'(k(x)) \cdot k'(x)$$

$$h(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow h'(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow h'(k(x)) = h'(\ln(x)) = -\frac{1}{(\ln(x))^2}$$

$$k(x) = \ln(x) \Rightarrow k'(x) = \frac{1}{x}$$

$$\left(\frac{1}{\ln(x)}\right)' = -\frac{1}{(\ln(x))^2} \cdot \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \left(e^{\frac{1}{\ln(x)}}\right)' = e^{\frac{1}{\ln(x)}} \cdot -\frac{1}{x(\ln(x))^2} = -\frac{e^{\frac{1}{\ln(x)}}}{x(\ln(x))^2}$$

P1) e) $\operatorname{arctanh}(x)$ es la inversa de $\tanh(x)$ (que es biyectiva, continua y derivable)

$$\text{Además } \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \Rightarrow (\tanh(x))' = \frac{(\sinh(x))' \cdot \cosh(x) - \sinh(x) \cdot (\cosh(x))'}{(\cosh(x))^2}$$

$$= \frac{(\cosh(x))^2 - (\sinh(x))^2}{(\cosh(x))^2} = 1 - (\tanh(x))^2 \neq 0 \quad \forall x.$$

Entonces por teorema de la función inversa:

$$(\operatorname{arctanh}(x))' = \frac{1}{(\tanh(y))'} = \frac{1}{1 - (\tanh(y))^2} = \frac{1}{1 - (\tanh(\operatorname{arctanh}(x)))^2} = \frac{1}{1 - x^2}$$

$$f) (\arctan(x) + \operatorname{arccot}(x))' = (\arctan(x))' + (\operatorname{arccot}(x))'$$

$$\downarrow \\ = \frac{1}{1+x^2} \quad (b)$$

$\operatorname{arccot}(x)$ es la inversa de $\cot(x) = \frac{1}{\tan(x)}$ que es biyectiva, continua y

derivable en su dominio: Además, $(\cot(x))' = \frac{0 \cdot \tan(x) - 1 \cdot (\tan(x))'}{(\tan(x))^2}$

$$= \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{(\tan(x))^2} = \frac{-1}{(\tan(x))^2(1+x^2)} \neq 0 \quad \forall x$$

por teorema de la función inversa

$$(\operatorname{arccot}(x))' = \frac{1}{(\cot(y))'} = \frac{1}{-(\tan(y))^2(1+y^2)} = \frac{-(1+y^2)}{(\cotan(y))^2} = \frac{-(1 + \operatorname{arccot}^2(x))}{x^2}$$

$$\therefore (\arctan(x) + \operatorname{arccot}(x))' = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1 + \operatorname{arccot}^2(x)}{1+x^2} = \frac{\operatorname{arccot}^2(x)}{1+x^2}$$

Recordemos la definición de derivada:

$$f'(\bar{x}) = \lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x}+h) - f(\bar{x})}{h}$$

usaremos la segunda definición:

$$(\log(\bar{x}))' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(\bar{x}+h) - \log(\bar{x})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log\left(\frac{\bar{x}+h}{\bar{x}}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log\left(1 + \frac{h}{\bar{x}}\right)}{h} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\bar{x}}}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log\left(1 + \frac{h}{\bar{x}}\right)}{\frac{h}{\bar{x}}} \cdot \frac{1}{\bar{x}} \quad \left(\begin{array}{l} \text{límite conocido} \\ \nearrow \end{array} \right)$$

$$\therefore (\log(\bar{x}))' = \frac{1}{\bar{x}}$$

por Teorema de la función inversa

$$(\log(x))' = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{e^{\log(x)}} = \frac{1}{x}$$

P3 $a(\theta) = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \theta}$ (Teorema del coseno)

Podemos escribirlo como $f(g(\theta))$

donde $f(\theta) = \sqrt{\theta}$ y $g(\theta) = b^2 + c^2 - 2bc \cos \theta$

$\Rightarrow f'(\theta) = \frac{1}{2\sqrt{\theta}}$ $g'(\theta) = -2bc \cdot -\sin \theta = 2bc \sin \theta$
 (b, c son constantes, $(\cos \theta)' = -\sin \theta$)

$$a'(\theta) = (f(g(\theta)))' = f'(g(\theta)) \cdot g'(\theta)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \theta}} \cdot 2bc \sin \theta$$

$$\therefore \frac{da}{d\theta} = \frac{bc \sin \theta}{\underbrace{\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \theta}}_a} = \frac{bc \sin \theta}{a}$$

Veamos que $\frac{bc \sin \theta}{a}$ es h_a

Del dibujo podemos ver que

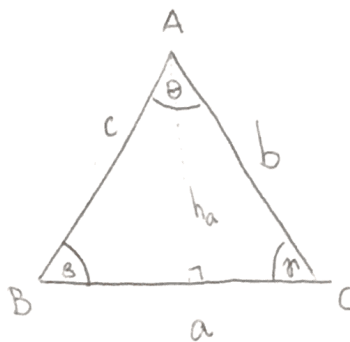
$$h_a = c \cdot \sin(\beta) = b \cdot \sin(\gamma)$$

Por Teorema del seno sabemos que

$$\frac{\sin \theta}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$$

$$\Rightarrow \sin \beta = \frac{b}{c} \sin \theta$$

$$h_a = c \sin(\beta) = \frac{cb}{a} \sin \theta //$$



P4 f dos veces derivable $\rightarrow$ hint usar TVM dos veces

$$f(0) = f'(0) = 0$$

$$\text{P.D.Q } \exists \xi \in (0,1) \text{ tal que } f''(\xi) = 2f(1)$$

hint: TVM entre 0 y 1

$$\text{considera } g(x) = f(x) - x^2 f(1) \leftarrow \text{hint: aplicar TVM aquí.}$$

ya que f es dos veces derivable, ~~por lo tanto~~ g también lo es.

$$\text{En efecto: } g'(x) = f'(x) - 2x f(1) \leftarrow g(1) \cdot f(1) \text{ es una constante}$$

$$g''(x) = f''(x) - 2f(1) \leftarrow \text{if!! si logramos probar que } g''(\xi) = 0 \text{ ganamos}$$

$$g(0) = f(0) - 0 = 0$$

$$g(1) = f(1) - f(1) = 0$$

$$g'(0) = f'(0) - 0 = 0$$

Por T.V.M sabemos que $\exists c \in (0,1)$ tal que

$$\frac{g(1) - g(0)}{1 - 0} = g'(c) \Rightarrow g'(c) = 0$$

entonces usamos TVM nuevamente pero entre 0 y c (porque sabemos que $g'(0) = g'(c) = 0$)

$$\Rightarrow \exists \xi \in (0,c) \text{ tal que } \frac{g'(c) - g'(0)}{c - 0} = g''(\xi)$$

$$\Rightarrow g''(\xi) = 0$$

$$\Rightarrow g''(\xi) = f''(\xi) - 2f(1) = 0$$

$$\Rightarrow f''(\xi) = 2f(1) //$$

$$\xi \in (0,c) \subseteq (0,1) \Rightarrow \xi \in (0,1) //$$

P5

Posición

$$X_i = 0 \text{ Km}$$

$$X_f = 3 \text{ Km}$$

Parásitos

$$P_i = 100 \left[\frac{\text{parásitos}}{\text{cm}^2} \right]$$

$$P_f = 600 \left[\frac{\text{parásitos}}{\text{cm}^2} \right]$$

Tasa de
crecimiento
de los
parásitos

$$\rightarrow P' > 10 (\star)$$

$$X' = V \leftarrow \text{velocidad de la ballena.}$$

Por TVM generalizado se tiene que

$$\frac{X_f - X_i}{P_f - P_i} = \frac{X'(c)}{P'(c)} = \frac{V}{P'}$$

con c un instante entre el inicial
y el final.

$$\Rightarrow \frac{3}{500} = \frac{V}{P'} \Rightarrow V = \frac{3P'}{500} \geq \frac{3 \cdot 10}{500} = 0,06 \frac{\text{Km}}{\text{hora}}$$

por $(\star)$

$$\therefore V \geq 0,06 \text{ Km/h}$$

es decir, es una Ballena gris //

Pb 14.11

a)



La recta normal es perpendicular a la recta tangencial.

Sabemos que la pendiente de la tangencial es $f'(x)$

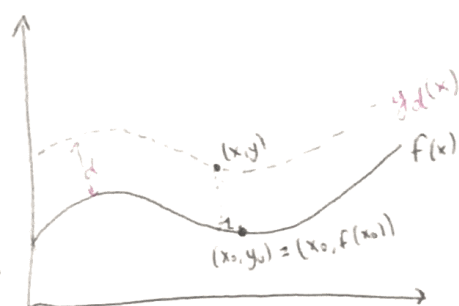
$$\Rightarrow \text{pendiente}_{\text{normal}} = -\frac{1}{f'(x)}$$

Como sabemos que pasa por el punto (x_0, y_0) , la recta normal es:

$$(y - y_0) = -\frac{1}{f'(x)} (x - x_0) \quad \Leftrightarrow \quad (y - f(x_0)) = -\frac{1}{f'(x)} (x - x_0) \quad (*)$$

b)

~~$(x_0, f(x_0)) = (x, f(x))$~~
~~es la~~
~~función que~~



$y_d(x)$ ← la función que buscamos

$$\text{se tiene que } (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = d^2$$

$$\Leftrightarrow (x - x_0)^2 + (y - f(x_0))^2 = d^2$$

$$\Leftrightarrow (y - f(x_0))^2 = d^2 - (x - x_0)^2$$

Tomando $(*)$ al cuadrado y reemplazando se tiene:

$$d^2 - (x - x_0)^2 = \frac{1}{(f'(x))^2} (x - x_0)^2$$

$$d^2 = (x - x_0)^2 \left(1 + \frac{1}{(f'(x))^2} \right)$$

$$(x - x_0)^2 = d^2 \left(\frac{(f'(x_0))^2}{1 + (f'(x_0))^2} \right) \quad / \sqrt{\quad}$$

$$x - x_0 = \pm \frac{d f'(x_0)}{\sqrt{1 + (f'(x_0))^2}} \quad \Rightarrow \quad x = x_0 \pm \frac{d f'(x_0)}{\sqrt{1 + (f'(x_0))^2}}$$

reemplazando en $(*)$

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)} \left[\frac{x_0 + d f'(x_0)}{\sqrt{1 + (f'(x_0))^2}} \right] \quad \Rightarrow \quad y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)} \left[\frac{x_0 + d f'(x_0)}{\sqrt{1 + (f'(x_0))^2}} \right]$$

"la mayor ordenada y"

P7] sea $f(x) = \log(x)$ Definida en el intervalo $[1, x+1]$ ($x > 0$)

Claramente f es continua en ese intervalo.

Por lo tanto, Por T.V.M se tiene que $\exists c \in (1, x+1)$

$$\text{Tal que } \frac{f(x+1) - f(1)}{x+1 - 1} = f'(c)$$

$$\Rightarrow \frac{\log(x+1) - \log(1)}{x} = f'(c)$$

$$\text{y sabemos que } f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{\log(x+1)}{x} = \frac{1}{c}$$

Pero como $c \in (1, x+1)$, tenemos que

$$\frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{c} \leq \frac{1}{1}$$

y entonces

$$\frac{1}{x+1} \leq \frac{\log(x+1)}{x} \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x+1} \leq \log(x+1) \leq x$$

$\forall x > 0$

(si $x=0$ es claro que

$$\frac{0}{1} \leq \log(1) \leq 0)$$